

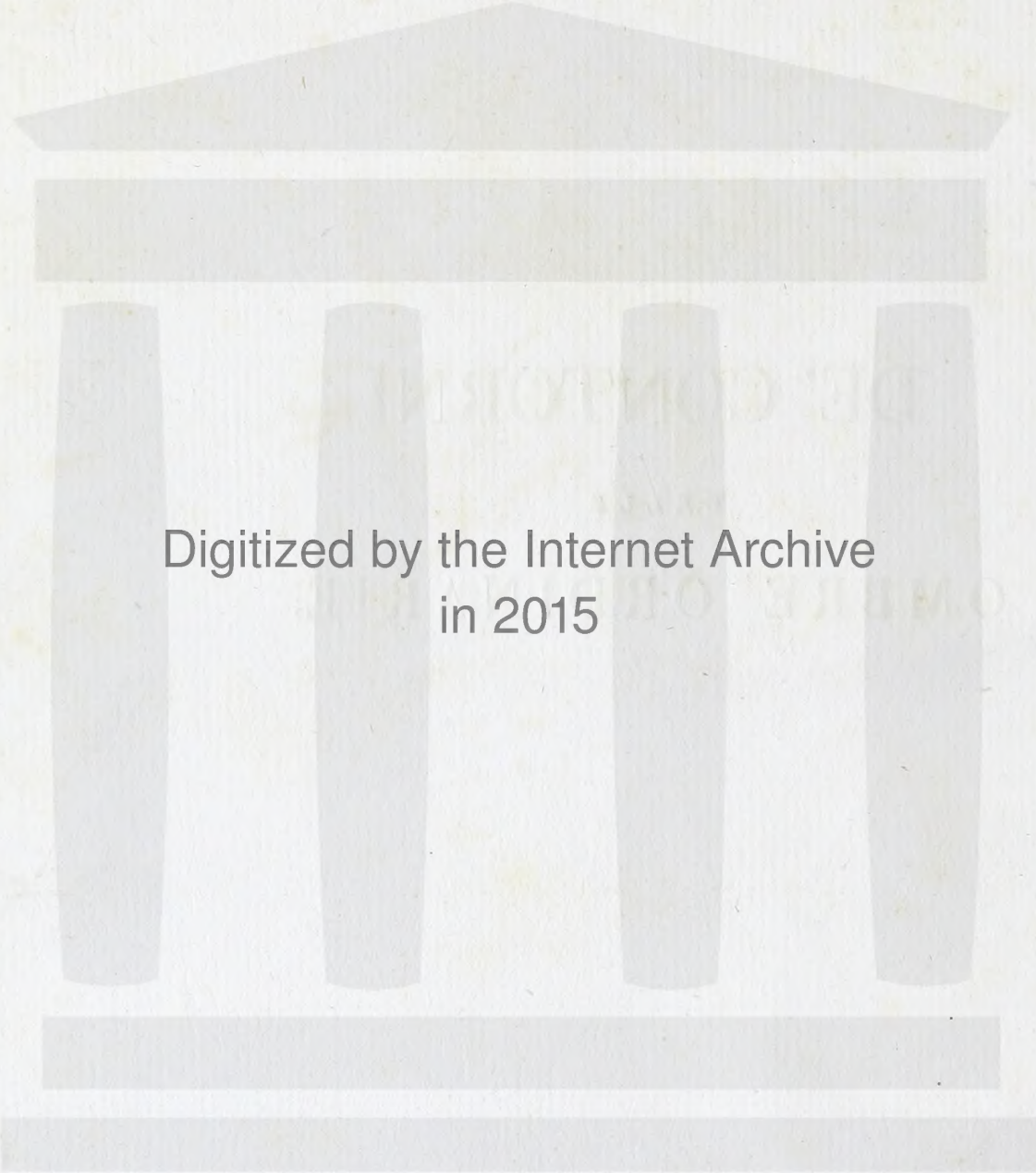




DE' CONTORNI
DELLE
OMBRE ORDINARIE.

Bordoni

Capriccio



Digitized by the Internet Archive
in 2015

DE' CONTORNI
DELLE
OMBRE ORDINARIE
TRATTATO

DI

A. BORDONI

GIÀ PROF. NELLA C. R. SCUOLA MILITARE DI PAVIA
ED UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETÀ ITALIANA
DELLE SCIENZE.



MILANO
DALL' IMPERIALE REGIA STAMPERIA
1816.

Tunc enim ars perfecta est, cum natura esse
videtur; natura autem nihil errat, cum artem
latenter adjunctam habet.

LONGINO. Cap. xxii.

P A R T E P R I M A.

PARTE SECONDA.

<i>DEI CONTORNI DELLE OMBRE PROPRIE</i>	» 7
<i>Dei contorni delle ombre proprie delle superficie cilindriche</i>	» ivi
<i>delle superficie coniche</i>	» 10
<i>delle superficie sferiche</i>	» 14
<i>Dei contorni delle ombre proprie delle superficie di un' ellissoide qua-</i>	
<i>lunque, di un' iperboloide a due foglie, e di una paraboloide ellittica</i>	» 17
<i>delle superficie di rotazione</i>	» 22
<i>delle superficie spirali</i>	» 29
<i>delle superficie dei canali</i>	» 37
<i>Due osservazioni, l'una relativa ai contorni delle ombre proprie delle</i>	
<i>superficie considerate qui sopra, e l'altra relativa a quelli di</i>	
<i>qualunque superficie</i>	» 41
<i>Due altre osservazioni, nelle quali si scuopre se una linea data possa</i>	
<i>esprimere il contorno dell'ombra propria di una data superficie,</i>	
<i>e qual direzione all'uopo dovrebbero avere i raggi di luce . . .</i>	» 43

<i>Osservazione quinta. Principj generali dai quali derivano tutte le regole grafiche esposte, e coi quali potrà chiunque istradarsi volendo delineare il contorno dell'ombra propria di qualunque altra superficie</i>	<i>pag.</i>	<i>45</i>
<i>Osservazione sesta. Scoprire se debbansi o no acquerellare l'ortografia e l'icnografia di un dato piano</i>	<i>»</i>	<i>46</i>

PARTE TERZA.

<i>DEI CONTORNI DELLE OMBRE PORTATE</i>	<i>»</i>	<i>49</i>
<i>Dei contorni delle ombre portate sulle superficie piane</i>	<i>»</i>	<i>ivi</i>
<i>sulle superficie cilindriche</i>	<i>»</i>	<i>53</i>
<i>sulle superficie coniche</i>	<i>»</i>	<i>63</i>
<i>sulle superficie sferiche</i>	<i>»</i>	<i>68</i>
<i>Dei contorni delle ombre portate sopra di un'ellissoide qualunque, di un'iperboloide a due foglie, e di una paraboloida ellittica</i>	<i>»</i>	<i>84</i>
<i>sulle superficie di rotazione</i>	<i>»</i>	<i>98</i>
<i>sulle superficie spirali</i>	<i>»</i>	<i>112</i>
<i>sulle superficie dei canali</i>	<i>»</i>	<i>114</i>
<i>Cinque osservazioni relative alle ombre proprie</i>	<i>»</i>	<i>117</i>

PARTE QUARTA.

<i>DEI CONTORNI DELLE OMBRE COMPOSTE</i>	<i>»</i>	<i>121</i>
<i>Delle ortografie dei contorni delle ombre che portano sopra sè stesse alcune sagome, e dei contorni delle ombre portate dalle medesime sul piano ortografico.</i>	<i>»</i>	<i>ivi</i>
<i>Dei contorni delle ombre che la base toscana porta sopra sè stessa e sui piani ortografico ed icnografico</i>	<i>»</i>	<i>123</i>
<i>Dell'ortografia del contorno dell'ombra che l'abaco porta sul toro, ed il toro sopra sè stesso, uniti insieme come si trovano comunemente nel capitello toscano, ed altra dimostrazione di quest'ultima regola</i>	<i>»</i>	<i>127</i>
<i>Dell'ortografia del contorno dell'ombra che il capitello toscano porta sopra sè stesso, e del contorno di quella portata dal medesimo sul piano ortografico</i>	<i>»</i>	<i>130</i>
<i>Dell'ortografia del contorno dell'ombra che porta sopra sè stessa la parte dell'architrave dorico composta della listella e di una goccia conica</i>	<i>»</i>	<i>132</i>

<i>Delle ortografie dei contorni delle ombre che porta sopra sè stessa la parte del cornicione dorico composta del gocciolatojo, dei modiglioni e del fregio con triglifi</i>	<i>pag. 133</i>
<i>Dell'ortografia del contorno dell'ombra che la base attica porta su sè stessa</i>	<i>» 134</i>
<i>Del contorno dell'ombra portata da una sfera sui piani ortografico ed icnografico</i>	<i>» 135</i>
<i>Delle ortografie dei contorni delle ombre che un frontespizio porta su sè stesso</i>	<i>» 136</i>
<i>Dell'ortografia del contorno dell'ombra che accade nell'ortografia e nello spaccato ordinario di una nicchia semicilindrica coperta da una volta sferica</i>	<i>» 137</i>
<i>Dell'ortografia del contorno dell'ombra che accade in una nicchia parallelepipedica coperta da una volta a botte</i>	<i>» 138</i>
<i>Delle ortografie dei contorni delle ombre che un arco porta sopra sè stesso, e del contorno di quella portata da esso sul piano ortografico</i>	<i>» 139</i>
<i>Dell'ortografia del contorno dell'ombra che accade nello spaccato ordinario di una volta a botte terminata in una volta sferica</i>	<i>» 140</i>
<i>Dei contorni delle ombre che un'altana porta su sè stessa e sul tetto sottoposto</i>	<i>» 141</i>
<i>Dei contorni delle ombre che accadono sopra alcune particolari superficie cilindriche, e di quelli delle ombre che accadono sulle volte a padiglione</i>	<i>» 142</i>
<i>Delle ortografie dei contorni delle ombre che accadono nello spaccato ordinario di una cupola aperta in cima circolarmente</i>	<i>» 145</i>
<i>Del contorno dell'ombra che un muro verticale porta sopra sè stesso</i>	<i>» 147</i>
<i>Del contorno dell'ombra che accade in un pozzo militare piramidale o conico</i>	<i>» ivi</i>
<i>Dei contorni delle ombre delle scale ordinarie, e dell'icnografia del contorno dell'ombra di una a chiocciola</i>	<i>» 152</i>
<i>Due osservazioni, l'una pei contorni delle ombre composte, e l'altra pei contorni di un'ombra qualunque</i>	<i>» 157</i>
<i>Nota dei lemmi necessarij per intendere alcune proposizioni di questo trattato</i>	<i>» 159</i>
<i>Nota delle opere pubblicate sui contorni delle ombre</i>	<i>» 180</i>

ERRORI.

CORREZIONI ED AGGIUNTE.

Pag.	lin.		
5	10	FM	GM
6	3	di luce, ha tutti	di luce e lo spigolo rh all'asse ML , ha tutti
7	24	di luce, e per una	di luce (le rette generatrici sono quelle per cui passa la suddetta generatrice), e per una
8	36	l'icnografia	l'icnografico
9	25	all'asse ML ,	al piano icnografico,
	32	icnografico od all'ortografico	ortografico
13	20	in S	in I
15	22	$c^2r^2 +$	$s^2r^2 +$
16	32	$(r^2 - b^2) : , = r \sqrt{\frac{2}{3}}$	$(r^2 - b^2) cs : , = \frac{1}{2} r \sqrt{\frac{2}{3}}$
	34	la CM	la prima CM , e l'altra $\frac{1}{2} CM$
20	31	rR	rN
27	40	SgU ,	SgU , si estenda la Ch in g ,
32	27	o la	o della
34	36	IAN	IAx
35	12	R	P
40	21	(fig. 25)	(fig. 29)
	31	Vx , -- ed eguali	Vx , -- parallele alla fF , ed eguali
42	29	$2abxz + (1 + b^2)x^2$	$2axz + (a^2 + b^2)x^2$
	31	$2abxy + (1 + a^2)y^2$	$2bxy + (a^2 + b^2)y^2$
45	8	verso il	pel verso opposto al
59	32	$z + x - y = 0$	$x = 0$
61	11	ed ai	e dai
65	9	l'icnografia	le icnografie
66	13	TV , e congiunta	TV , unita CPS , e congiunta
67	35	secondo	primo e secondo
72	15	o sia $2 \cdot FB$	o sia FB
80	18	AB ;	AB , come si è già detto;
91	20	in vece di t, s, u	si legga x, y, z
94	36}	al Δ	al complemento del Δ
	45}		
95	4	anch'esso al Δ	al Δ
113	5	verticale, come	verticale, e che la generatrice passi costantemente per l'asse stesso, come (altrettanto si aggiunga al lemma 31)
125	25	$\sqrt{14}$, 25	$\sqrt{13}$, 75
126	18	$\frac{1}{3} \sqrt{1013}$	$\frac{1}{3} \sqrt{913}$
	26	e però della seconda delle medesime due distanze.	e però i medesimi punti saranno fuori della periferia immaginata.
133	17	on	ou
135	4	Prima del n.º 5 si ponga questa Oss. Se una porzione dell'estremo dell'ombra portata dall'ovolo cadesse sulla listella DE , l'ortografia di esso si troverebbe col fare per la DE ciò che si è fatto per FE .	
140	2	cv	nv
	6	$V-v$ ed il raggio	$V-v$ il piano perpendicolare all'ortografico ed il raggio
143	33	lati, sono	lati, si suppongono interamente
146	32	sj —	$O\Delta$ —
151	13	sarebbe composto	sarebbe in generale composto
156	6	tB	fB
nella fig. 48		in vece della z leggasì x .	
146		in vece della P posta a destra della S si legga R .	
153		α indica il segmento delle rette LM , Aa ,	

PARTE PRIMA.

DEFINIZIONI E NOZIONI GENERALI.

I.

PER rispondere a più dimande che mi furono fatte sui contorni delle ombre, lessi tutte le opere pubblicate intorno ai medesimi; e non avendo trovato quanto aveva bisogno onde soddisfare adeguatamente alle dimande stesse, tentai di supplirvi colle mie ricerche, e conseguii di fatto felicemente tutto quello che all' uopo desiderava; anzi ebbi la sorte di scoprire delle regole esatte e tanto semplici per delineare i contorni di alcune ombre ordinarie, che le persone, dalle quali vennero fatte le dimande suddette, mi animarono a pubblicarle per vantaggio delle belle arti.

Aveva già divisato di far questo con brevi memorie, ma essendomi in quel tempo nato un pressante bisogno di aver pronto un lavoro di cose elementari ed utili immediatamente alle belle arti, mi posi all' ardua impresa di pubblicare un Trattato sui Contorni delle Ombre ordinarie, e soddisfare in tal guisa insieme al mio bisogno anche il lodevole desiderio mostrato in più occasioni da varj architetti e disegnatori, non che a quello delle persone suddette; ed affinchè mi riescisse meno imperfetto, osservai quali erano le *superficie semplici* costituenti le ortografie, le icnografie, i profili, ecc. delle fabbriche commendate dai più grandi architetti, e trovai le ombre di quelle fra queste superficie, a cui non aveva ancora pensato, e poscia di alcune altre composte di queste medesime superficie semplici, e che s' incontrano spessissime volte nell' architettura; e da tutto ciò ne emerse il presente trattato.

Quantunque alcune proposizioni, che costituiscono questo trattato, furono già pubblicate dagli autori che io cito alla fine di esso, ciò non ostante, siccome le soluzioni o regole ch' essi danno, sono generalmente molto complicate, ed alcune anco errate; così ho divisato di trattare queste poche proposizioni come le nuove: anzi nel principio aveva fissato di esporre di

mano in mano, dopo le mie regole, anco le medesime regole errate, onde mostrarle ai giovani disegnatori, affinchè non le usassero; ma siccome con ciò sarebbesi ingrossato assai di più questo libro, e per accidentalità le stesse regole errate sono più complicate di quelle che io do delle medesime proposizioni; pertanto abbandonai questo pensiero, persuaso che i giovani stessi, pei quali unicamente io scrivo, preferiranno ognora le mie regole a quelle, riunendosi nelle mie, oltre una maggior semplicità, anche l'esattezza, che io spero di non avere giammai perduto di vista.

Il lettore che si sarà impossessato bene delle regole che do in questo trattato, sarà in istato di segnare i contorni delle ombre anco pei corpi non soggetti a leggi geometriche definibili, come sono le foglie, gli ovoli e simili ornati, sempre che egli conosca le loro vere dimensioni.

2.

Un corpo che impedisce il passaggio ai raggi di luce, produce un'ombra, la quale si discerne sulla superficie del corpo stesso o su quella di altro corpo, ovvero in amendue questi modi. L'ombra visibile sul corpo medesimo, che impedisce il passaggio alla luce, si chiamerà *ombra propria*; e l'altra, cioè quella che scorgesi sulla superficie del corpo immerso nello spazio per cui passerebbero i raggi di luce arrestati dal primo, si dirà in vece *ombra portata*; ed *ombre composte* si denomineranno quelle formate dalla unione di due o più ombre proprie ovvero portate, oppure di alcune proprie e di alcune portate.

Prescindendo dalla *diffrazione* della luce, le qualità di un corpo che influiscono sul contorno della sua ombra propria, sono la figura e la grandezza di esso, e la sua posizione relativamente alla direzione dei raggi di luce; e quelle da cui dipende il contorno di un'ombra portata, sono le figure e grandezze dei due corpi, la loro posizione relativa, non che la posizione di essi rispetto ai raggi medesimi. Di modo che, ammesso i raggi di luce fra loro paralleli, come sono effettivamente per le ombre ordinarie, i contorni delle ombre, qualunque esse siano, saranno affatto individuati, qualora individuate siano le dette qualità dei corpi ed una parallela ai raggi medesimi.

Essendo molte le proposizioni che costituiscono questo trattato, onde procacciargli la maggior chiarezza possibile, ho diviso il medesimo in quattro parti: nella prima, ch'è la presente, espongo le definizioni e le nozioni generali necessarissime per l'intelligenza del medesimo; nella seconda parlo de' contorni delle sole ombre proprie; nella terza di quelli delle ombre portate; e nella quarta ed ultima parlo de' contorni delle ombre composte.

Così, onde soddisfare anche chi desidera conoscere le regole, e non ha tempo di vedere le loro dimostrazioni, generalmente dichiaro subito dopo l'enunciato di ciascuna proposizione le regole per la soluzione di essa: come per facilitare la lettura di tutto il trattato, e risparmiare di cercare altrove, e forse in vano gli erudimenti necessari per intenderlo, ho riunito in una nota posta alla fine di esso varie proposizioni puramente geometriche, le quali sono in generale altrettanti lemmi di altre proposizioni esposte nel trattato medesimo.

3.

Per rappresentare i punti, le linee e le superficie situate comunque nello spazio, seguendo gli artisti, immaginerò due piani fissi nello spazio medesimo, l'uno orizzontale, e l'altro verticale e posto dinanzi ed a fronte del lettore; e per evitare la confusione nominerò *piano icnografico* l'orizzontale, ed *ortografico* il verticale.

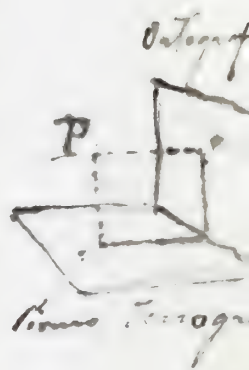
Il piede della perpendicolare tirata al piano ortografico da un punto posto comunque nello spazio si chiamerà *ortografia* di esso punto, e quello della perpendicolare condotta dal medesimo punto al piano icnografico si nominerà *icnografia* del punto stesso; ed esso punto dirassi *obbiettivo*.

Così, se da tutti i punti di una linea situata in qualunque modo nello spazio tireransi le perpendicolari al piano ortografico, la linea costituita dalla serie dei piedi di esse perpendicolari denominerassi *ortografia* della medesima linea, la quale verrà detta *obbiettiva*; come si chiamerà *icnografia* la linea nella quale saranno i piedi di tutte le perpendicolari condotte al piano icnografico dai punti della stessa obbiettiva.

4.

Individuato è quel punto obbiettivo che ha un'ortografia ed icnografia data. Poichè tirando per l'ortografia di esso la perpendicolare al piano ortografico, e per la icnografia la verticale, in ambedue queste rette si deve trovare il punto obbiettivo, e però dovrà essere nel punto comune alle medesime, il quale è solo ed individuato.

Similmente sarà pure data ed individuata generalmente la linea obbiettiva, che avrà una data ortografia ed una data icnografia. Imperciocchè, se una retta si moverà, conservandosi perpendicolare al piano ortografico, e segando continuamente l'ortografia data, essa genererà una superficie, nella quale vi sarà la linea obbiettiva: così se una retta verticale moverassi in un modo simile lungo l'icnografia, essa descriverà una superficie, in cui pure si troverà la stessa obbiettiva. Quindi, dovendo essere la medesima obbiettiva in ambedue queste superficie, sarà essa la loro intersecazione; e però sempre individuata, a meno che le due superficie immaginate coincidano fra loro, ciò che succede nel solo caso in cui sia una retta linea sì l'ortografia che



L'icnografia, più ambedue perpendicolari alla comune intersecazione dei piani ortografico ed icnografico.

In questo caso particolarissimo volendo pure rappresentare individualmente la linea obbiettiva, s'immaginerà un secondo piano verticale e perpendicolare alla sezione dell'ortografico ed icnografico, e si farà su di esso ciò che si è indicato pel piano ortografico ed icnografico per avere le ortografie ed icnografie. Vale a dire, da tutti i punti della linea obbiettiva tireransi delle perpendicolari a questo piano; e si avrà nella serie dei piedi delle medesime una linea, la quale insieme o alla ortografia oppure alla icnografia farà conoscere individualmente l'obbiettiva.

La linea descritta in tal guisa in questo nuovo piano, detto comunemente *piano de' profili*, si chiamerà *profilo* della obbiettiva; l'ortografia, l'icnografia ed il profilo si diranno in generale *proiezioni rette* od *ortogonali* della stessa obbiettiva; ed i piani ortografico, icnografico e dei profili, *piani coordinati*.

5.

Il bisogno che ebbero molte volte gli artisti di disegnare le ortografie ed i profili nel piano icnografico esteso sufficientemente, fece ad essi immaginare che la parte del piano ortografico in cui vi erano disegnate le ortografie, e quella del piano de' profili, nella quale vi erano i profili medesimi, si fossero adattate a quelle parti del piano icnografico non per anco occupate da icnografie, col rotare attorno alle rispettive sezioni di essi piani e dell'icnografico.

Tutte le volte che nell'esporre o dimostrare qualche proposizione avrò bisogno contemporaneamente della ortografia ed icnografia, ovvero della icnografia e del profilo, in generale di due o più di queste proiezioni, io seguirò a capello questa massima ampiamente conosciuta dai disegnatori; cioè che i piani ortografico e dei profili siansi adattati all'icnografico, rotando intorno alle rette comuni a ciascuno di essi ed all'icnografico medesimo: avrò però sempre il riguardo d'indicare queste rette comuni, le quali si chiameranno *assi*, e di supporre, specialmente quando farò dei ragionamenti, i medesimi due piani ortografico e dei profili, non che le figure disegnate in essi, nelle loro vere posizioni primitive.

6.

Data l'ortografia e l'icnografia di una retta parallela ai raggi di luce, trovare gli angoli che essa fa coi piani ortografico, icnografico e dei profili, non che il profilo di essa medesima.

Sia AC (fig. 1) l'icnografia, ed aC l'ortografia della retta parallela ai raggi di luce; ML l'asse attorno al quale ha rotato il piano ortografico per adattarsi all'icnografico, come sopra si è detto; ed FM sia quello attorno cui ha rotato il piano de' profili per disporsi nel medesimo icnografico.

Si conduca ABa perpendicolare all'asse ML ; indi si prenda BL eguale alla AC , uniscasi aL , e sarà aLB eguale all'angolo fatto col piano icnografico dalla parallela ai raggi di luce: si faccia BE eguale alla Ca , congiungasi AE , ed AEB eguaglierà l'angolo che fa la medesima retta col piano ortografico. Così, presa MF eguale alla AB , e tirata FG perpendicolare all'asse FM ed eguale alla Ba , e congiunta FM , avrassi in questa il profilo della parallela ai raggi di luce; e segata BH eguale alla GM , indi congiunta CH , l'angolo risultante BHC sarà eguale a quello fatto dalla medesima retta parallela ai raggi di luce col piano dei profili.

Si costruisca il parallelepipedo rettangolo nhm (fig. 2), il quale abbia i lati rn , rh , rm eguali rispettivamente alle rette AB , BC , Ba , ed uniscansi le hl , hn , hm ed lr .

Ponendo questo parallelepipedo sul piano icnografico, ed in modo che lo spigolo nr cada nella retta AB , l' rh sulla BC , e la rm superiormente al piano icnografico stesso, la retta hl coinciderà colla parallela ai raggi di luce, la hm coll'ortografia della medesima, e la hn coll'icnografia; e però in questa posizione sarà rl parallela al profilo della medesima retta parallela ai raggi di luce, e gli angoli lhn , lhm , hln eguaglieranno quelli fatti da essa retta coi piani icnografico, ortografico e dei profili.

Ma essendo AB eguale alla lm , e le BE , aC , hm pure eguali fra loro, si ha l'angolo AEB eguale all' lhm ; e per essere Ba eguale alla nl , e BL all' hn , i triangoli aBL , nlh danno l'angolo aLB eguale all' lhn . Adunque i due angoli AEB , aLB eguaglieranno anch'essi, siccome ho asserito, gli angoli fatti dalla parallela ai raggi di luce coi piani ortografico ed icnografico.

Così per essere eguali sì le MF , AB che le FG , Ba , sarà GM il profilo cercato; ed essendo eguali le BH , GM , lr e le due BC , rh , gli angoli BHC , hln saranno essi pure eguali; e però BHC eguaglierà anch'esso l'angolo che fa la parallela ai raggi di luce col piano dei profili.

COROLLARIO. Per determinare la Ca ortografia della parallela ai raggi di luce, quando si conosca AC sua icnografia, e l'angolo che fanno i raggi medesimi col piano icnografico: dopo avere condotta ABa perpendicolare alla ML , e segata BL eguale alla AC , si costruirà l'angolo BLa eguale a quello che fanno i raggi di luce col piano icnografico, e congiungerassi la Ca ; e questa sarà l'ortografia dimandata. Così, se fosse data Ca ortografia della parallela ai raggi di luce, l'angolo fatto da essi col piano ortografico, e si volesse l'icnografia della medesima parallela, si farebbe la Ba perpendicolare alla ML , BE eguale alla Ca , l'angolo BCA eguale al dato; e nella retta AC avrebbesi l'icnografia dimandata, siccome è evidente.

Nella ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione che fissano generalmente i disegnatori, la quale si dirà *direzione ordinaria*, il parallelepipedo $nmhl$, la cui diagonale hl è parallela ai raggi di luce, ha tutti i lati eguali, o sia è desso un cubo; e però in tale ipotesi gli angoli nhr , mhr , lrn ed i loro eguali ACB , aCB , GMF saranno semiretti o sia di quarantacinque gradi; ed i tre lhm , lhn , hln , che i raggi fanno coi tre piani coordinati, saranno di gradi trentacinque e sedici minuti primi prossimamente.

In tutto questo trattato, per evitare una stucchevole ripetizione, quando il bisogno non richiederà altrimenti, intenderò colla lettera O l'ortografia, e colla I l'icnografia di una parallela ai raggi di luce, colle Σ e Δ gli angoli aLB , AEB fatti da essa coi piani icnografico ed ortografico, colla r l'altro FGM , e colla retta ML costantemente la comune sezione o l'asse dei medesimi due piani ortografico ed icnografico: così molte volte dirò di condurre delle rette, ma per conservar chiare le figure segnerò i soli termini o due o più punti qualunque di esse.

PARTE SECONDA.

DE' CONTORNI DELLE OMBRE PROPRIE.

UNA retta che si muova conservandosi parallela ai raggi di luce, e toccando la superficie di un corpo, senza punto segarla, genera una superficie, la quale tocca tangenzialmente quella del corpo stesso nel contorno dell'ombra propria del medesimo. La superficie generata in tal guisa dalla retta parallela ai raggi di luce si chiamerà costantemente *superficie involvente*.

Da questa semplicissima verità per sè stessa evidente, e da ciò che si è detto nella parte antecedente, ne discende che qualsisia quistione relativa alla delineazione dei *contorni* delle ombre proprie equivale alla seguente di pura geometria: *Data la superficie di un corpo ed una retta parallela ai raggi di luce, trovare la linea di contatto fra essa superficie e la involvente suddetta*; e questa sarà appunto la proposizione che io tratterò in questa parte per ciascuna di quelle superficie che s'incontrano nelle belle arti, particolarmente nell'architettura.

DE' CONTORNI

DELLE OMBRE PROPRIE DELLE SUPERFICIE CILINDRICHE.

Una retta che si muova mantenendosi costantemente parallela ad una data, genera una superficie che si chiama *cilindrica*. La retta mobile generante la superficie dicesi *retta generatrice* di essa superficie. Così una linea, la quale sia incontrata costantemente dalla retta generatrice in tutte le posizioni per cui passa generando la superficie cilindrica, chiamasi *direttrice* della medesima superficie. La superficie denominata or ora involvente è una superficie cilindrica che ha le rette generatrici parallele ai raggi di luce, e per una delle direttrici il contorno dell'ombra propria.

Le sezioni fatte da una superficie qualunque ai piani coordinati diconsi *tracce* della medesima superficie, e particolarmente traccia ortografica quella fatta al piano ortografico, ed icnografica quella fatta al piano icnografico. Le tracce di una superficie cilindrica sono anche sue direttrici.

Così si chiamerà ortografia ed icnografia della superficie di un corpo lo spazio racchiuso dall'intersecazione fatta al piano ortografico ed icnografico, dalla superficie cilindrica che toccherà tangenzialmente quella del corpo stesso, come la involvente suddetta, ed avrà le rette generatrici perpendicolari ai piani coordinati medesimi. Similmente si chiameranno varie volte ortografia ed icnografia di una porzione di qualunque superficie le parti dei piani ortografico ed icnografico racchiuse dalle linee esprimenti l'ortografia e l'icnografia dei lembi di essa superficie.

Per indicare un punto, una linea, una superficie di cui siano figurate l'ortografia e l'icnografia, od in generale due sue proiezioni, scriveransi queste proiezioni l'una dopo l'altra e separate da una lineetta orizzontale. Ad esempio, per indicare il punto, la linea, la superficie che hanno le ortografie in C , CD , ABC , e le icnografie in c , cd , abc , scriverò $C-c$, $CD-cd$, $ABC-abc$.

Siccome una superficie cilindrica è affatto individuata, qualora lo sia una sua direttrice ed una parallela alle sue rette generatrici; così per individuare una di queste superficie indicherò una parallela alle rette sue generatrici ed una sua direttrice, la quale sarà generalmente una delle tracce della medesima superficie.

PROPOSIZIONE I.

Data la traccia icnografica di una superficie cilindrica, l'ortografia e l'icnografia di una retta sua generatrice, trovare l'ortografia e l'icnografia del contorno dell'ombra propria della superficie medesima.

Siano AB, ab (fig. 3) l'icnografia e l'ortografia di una retta generatrice della superficie cilindrica, ed ACF sia la traccia data di essa.

Si conduca HL parallela alla I , ed Lh alla O ; si faccia Hh perpendicolare all'asse ML , e dai punti H, h tirinsi le HN, hn parallele rispettivamente alle AB, ab ; e dal punto n , dove la hn sega ML , conducasi nN perpendicolare alla stessa ML , e si estenda sino in N ad incontrare cioè HN ; indi si congiunga LN , e si determini C punto di contatto fra la traccia ACF e la CD sua tangente parallela alla NL : fatto ciò, si tiri la Cc perpendicolare alla LM , e conducansi le CE, ce parallele rispettivamente alle AB, ab ; e queste CE, ce saranno l'icnografia e l'ortografia di una retta facente parte del contorno dell'ombra propria della superficie cilindrica.

S'immagini il piano delle rette $HN-hn$, $HL-hL$, e quello delle $CE-ce$, CD ; il primo di questi piani segherà l'icnografia nella LN , e l'altro nella stessa CD ; e però saranno fra loro paralleli, perchè le rette $CE-ce$, CD sono rispettivamente parallele alle $HN-hn$, LN .

Ma il piano delle $CE - ce$, CD è tangente la superficie cilindrica, giacchè passa per la retta $CE - ce$ generatrice, e per la CD tangente la traccia ACF ; ed è parallelo ai raggi di luce, per esserlo al piano delle $HN - hn$, $HL - hL$, nel quale vi è la $HL - hL$.

Adunque lo stesso piano delle $CE - ce$, CD rappresenterà, in questo caso, la superficie involvente. Quindi la retta $CE - ce$, lungo la quale esso piano tocca tangenzialmente la superficie cilindrica, sarà nel contorno dell'ombra propria di questa superficie medesima; e conseguentemente nelle rette CE , ce avransi l'icnografia e l'ortografia dimandate; come dovevasi dimostrare.

Ciò che si è fatto pel punto di contatto C , si dica per gli analoghi H , -- a cui corrispondono altre tangenti HI , -- della traccia ACF parallele anch'esse alla LN ; e si avranno le HP , hp , -- per proiezioni di altre rette generatrici, estremi dell'ombra propria della superficie cilindrica.

OSSERVAZIONE 1. Per la figura che hassi sott'occhio, ammessi i raggi di luce diretti da $H - h$ verso L , gli spazj che dovranno acquerellare, saranno, nell'ortografia $cesr$, e nell'icnografia $HPVS$, le rette Rr , SV essendo amendue tangenti la traccia ACF , e la prima perpendicolare alla LM , e la seconda parallela alla AB .

Nella stessa ipotesi, per la direzione dei raggi di luce, se la traccia ACF non avrà tangenti, le quali siano parallele alla retta NL , l'ortografia e l'icnografia della superficie cilindrica saranno tutte illuminate o tutte in ombra. Così, se coincidessero i due punti N , L , nel qual caso evidentemente si confonderebbero le rette $HL - hL$, HN , hn , o sia sarebbero i raggi di luce paralleli alle generatrici della superficie cilindrica, la costruzione lascerebbe la quistione indeterminata, appunto come richiederebbe in tal caso la natura medesima di essa.

COROLLARIO. Se le proiezioni della retta generatrice la superficie cilindrica saranno perpendicolari all'asse ML , il punto N cadrà nell' H , e però la LN si confonderà colla stessa HL . Quindi le tangenti CD , HI , --, le quali determinano i punti C , H , --, dovranno essere parallele alla HL icnografia di una retta parallela ai raggi di luce; e per questo, nella ipotesi ordinaria della direzione dei raggi di luce, le CD , HI , -- tangenti la traccia faranno angoli semiretti colla ML .

Egli è evidente che questo corollario si estende anche agli altri casi, pure frequentissimi in pratica, delle rette generatrici la superficie cilindrica perpendicolari al piano icnografico od all'ortografico.

OSSERVAZIONE 2. Quando le rette generatrici della superficie cilindrica saranno parallele alla LM , converrà conoscere la sua traccia nel piano dei profili; ed in questo caso si determineranno i punti analoghi ai C , H , --, come ho detto nel corollario esposto. Ad esempio: sia vu (fig. 4) la traccia nel piano dei profili, ed $FSVG$, $absr$ l'icnografia e l'ortografia della medesima superficie, ed M il profilo di una retta parallela ai raggi di luce; ed LM , Lr siano i due assi, attorno cui hanno rotato i due piani ortografico e dei profili per adattarsi all'icnografico.

Condotte le tangenti vt , ux , -- parallele alla M , si prenderanno le LH , LC , -- eguali rispettivamente alle orizzontali hu , cv , --, e si condurranno le CE , HP , vce , uhp , -- parallele alla LM ; e queste saranno le proiezioni dei contorni dell'ombra.

Nella ipotesi che i raggi di luce siano diretti come nell'antecedente osservazione, gli spazj $SVPH$, $ceba$ saranno quelli che dovranno ombrare.

OSSERVAZIONE 3. Ciò che ho detto, conoscendosi la traccia icnografica della superficie, si estende al caso che la traccia data sia l'ortografica, e tutto senza il minimo cambiamento notabile.

OSSERVAZIONE 4. Per alcune fra le superficie cilindriche che s'incontrano nelle belle arti, in vece di una traccia di esse, sono date le proiezioni di una loro direttrice comunque posta nello spazio: volendo estendere il metodo esposto alla determinazione dell'ombra propria di queste superficie, converrà primieramente trovare una traccia di esse: veggasi per questo il lemma primo.

DE' CONTORNI

DELLE OMBRE PROPRIE DELLE SUPERFICIE CONICHE.

Si chiamerà superficie conica quella generata da una retta, che si muove passando costantemente per un dato punto individuato. La retta che genera questa superficie, si dirà *retta generatrice* di essa superficie; come il punto individuato, per cui passerà costantemente questa retta, dirassi *vertice* della medesima superficie.

Una linea, la quale sia incontrata costantemente dalla retta generatrice di una superficie conica, e conseguentemente esistente nella superficie stessa, si chiamerà *direttrice* della medesima superficie. Le tracce di una superficie conica sono anche direttrici di essa.

È affatto individuata quella superficie conica che ha un dato punto per vertice, ed una data linea per direttrice; si potrà adunque scrivere geometricamente, come farò, una superficie conica, scrivendo il suo vertice ed una sua direttrice, la quale sarà generalmente una sua traccia.

PROPOSIZIONE II.

Data la traccia icnografica di una superficie conica e le proiezioni del suo vertice, trovare l'ortografia e l'icnografia del contorno dell'ombra propria della medesima superficie.

Siano C, c (fig. 5) l'icnografia e l'ortografia del vertice della superficie conica, ed AB sia la traccia di essa medesima.

Si traccino le rette CD, cd rispettivamente parallele alle I, O ; si tiri dD perpendicolare alla LM , e dal punto D la DT tangente alla traccia AB : fatto ciò, tirisi dal punto di contatto D la retta Tt perpendicolare alla LM , e congiungansi le rette TC, tc ; e queste ultime due saranno l'icnografia e l'ortografia dimandate.

Il piano delle rette $CT - ct$, DT sarà tangente la superficie conica, per essere $CT - ct$ una generatrice di essa, e la DT tangente la traccia AB ; e passerà per la retta $CD - cd$ parallela ai raggi di luce, perchè passa pei punti $C - c$, D di essa.

In questo piano tangente la superficie s'immaginino quante rette si vogliono parallele alla $cd - CD$; risulteranno esse parallele ai raggi di luce e tangenti la superficie

conica medesima; e per conseguenza questo piano sarà la superficie involvente, ed i punti di contatto fra esso piano e la superficie conica apparterranno all'estremo dell'ombra di cui si parla. Ma questi punti sono nella retta $ct - CT$; adunque nelle medesime proiezioni CT , ct avransi l'icnografia e l'ortografia dimandate; come ecc.

Altrettanto si direbbe se la traccia data fosse l'ortografica.

OSSERVAZIONE 1. Se dal punto D si potranno condurre più tangenti DT , DV , -- alla traccia AB , si dirà di una qualunque di esse ciò che ho detto della DT . Così le rette CV , cv , -- saranno le proiezioni di un'altra retta generatrice della superficie conica, altro estremo dell'ombra propria della medesima superficie.

OSSERVAZIONE 2. Se i raggi di luce saranno diretti come nella prima osservazione della proposizione antecedente, la porzione in ombra della superficie conica sarà quella avente per icnografia $TBVC$, e per ortografia $vcbt$, supposto Bb perpendicolare alla LM e tangente la traccia AB ; e però si dovrà ombreggiare, del piano icnografico la parte $TBVC$, e dell'ortografico la sola porzione bct , giacchè la rimanente vcb resta coperta dalla stessa superficie conica.

OSSERVAZIONE 3. Quando risulterà cd parallela alla LM , ciò che accadrà allorchè i raggi di luce saranno orizzontali, il punto D troverassi ad una distanza infinita dal C ; e però le tangenti TD , VD , -- risulteranno parallele alla stessa CD . In questo caso adunque, per avere i punti di contatto T , V , -- onde determinare le proiezioni del contorno dell'ombra propria della superficie conica, basterà condurre le tangenti della traccia icnografica AB parallele alla I .

OSSERVAZIONE 4. Se dal punto D non si potranno tirare delle tangenti la traccia AB , non vi saranno estremi d'ombre proprie, e però la superficie interamente illuminata od in ombra. Evidentemente avrà sempre luogo questa eccezione, quando la traccia della superficie conica sarà rientrante e convessa, e che il punto D cadrà dentro dello spazio racchiuso da essa traccia.

Come per le superficie cilindriche, così per le coniche, alcune volte, in vece di essere data una traccia, sono conosciute le proiezioni di una direttrice; e però volendo determinare l'ortografia e l'icnografia delle loro ombre proprie colla regola esposta, bisognerà trovare prima una traccia di esse: ciò si farà col lemma secondo.

OSSERVAZIONE 5. Le superficie coniche più comuni nelle arti sono di coni retti ordinarij, che hanno per una direttrice la periferia di un cerchio orizzontale, e gli assi verticali; e generalmente si ha di mira il disegno della sola ortografia.

Sebbene la regola esposta per trovare l'ortografia dell'ombra propria di una superficie conica valga per queste particolari superficie, come per qualunque altra, nulladimeno espongo per esse la regola seguente, la quale in sostanza è la stessa generale, colle modificazioni però che permette la superficie particolare insieme alla proprietà di essere perfettamente eguali fra loro le ortografie di una stessa figura, qualora siano fatte sopra piani paralleli.

L'ortografia della superficie conica disegnata nel piano che passa per l'asse di essa superficie sia ABC (fig. 6).

Si tiri la BE parallela alla O , e dal punto E conducasi la EF perpendicolare alla LM , e dal D centro della base tirisi DF parallela alla I , ed otterrassi la retta terminata DF : fatto ciò, col centro G , punto di mezzo della DF , e col raggio eguale alla DG descrivasi l'arco circolare γ , e col centro D e raggio DC si descriva l'arco x ; e dal segmento O di questi archi conducasi OP perpendicolare alla ML asse: congiunta BP , sarà questa l'ortografia dimandata.

Imperciocchè essendo D , O ed F punti equidistanti dal G , l' O sarà nella periferia circolare che ha per diametro la DF ; e però l'angolo FOD , fatto in essa semiperiferia, sarà retto, per cui FO risulterà perpendicolare al raggio DO ; e conseguentemente O esprimerà il punto di contatto fra la retta FO e la periferia della base del cono. Quindi la retta BP sarà l'ortografia dimandata; ciò che ecc.

Nella ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria, il punto F si può anco determinare, facendo l'angolo EDF semiretto, e segnando nella DF il punto F , dove vien segata dalla orizzontale BF condotta pel punto B .

OSSERVAZIONE 6. Se l'operazione fatta nell'osservazione antecedente da una banda della retta DF per trovare il punto O , si replicherà dall'altra, avrassi l'analogo punto o , dal quale condotta op perpendicolare alla LM , e congiunte le Bp , oD , saranno queste l'ortografia e l'icnografia dell'altro estremo dell'ombra della superficie conica.

Da una proposizione di geometria elementare risulta che i due archi x , y non si segheranno, nel solo caso in cui il punto F cadrà dentro della base del cono; ma in questo caso si è già veduto che la superficie conica trovasi tutta illuminata o tutta in ombra: sarà tutta illuminata, se la luce sarà diretta da $B-D$ verso $E-F$, e tutta in ombra, quando avrà la direzione contraria. Quindi, non segandosi i due archetti x , y , il disegnatore lascerà in luce od ombreggerà interamente sì l'ortografia che l'icnografia, secondo che i raggi di luce saranno diretti da $B-D$ verso $E-F$, o pel verso contrario.

Nella ipotesi ordinaria esso avrà quest'ultima cognizione più brevemente nel modo seguente. Il quadrato della orizzontale DF risulta, in quest'ipotesi, doppio di quello della BD : affinchè si seghino gli archi x , y , il punto F deve cadere fuori della base del cono, o sia dev'essere la CD minore della DF ; dovrà essere adunque il quadrato della stessa CD minore del doppio di quello della BD .

Pertanto, presa che avrà la DH eguale alla BD , per cui avrà il doppio quadrato della BD eguale a quello della BH ; se troverà il quadrato della CD maggiore di quello della BH , vale a dire se la retta CD risulterà maggiore della BH , lascerà tanto l'ortografia, quanto l'icnografia in luce, qualora la luce sia diretta da $B-D$ verso $E-F$; altrimenti, se questa sarà diretta da $E-F$ verso $B-D$, e CD risulti maggiore della BH , ombreggerà interamente sì l'una che l'altra di queste proiezioni.

Ammessa la luce diretta dal vertice verso la base, se il punto E cadrà nella retta terminata AC , e l' F si troverà al disopra della AC stessa, l'ortografia ABC sarà tutta in luce, perchè i contorni dell'ombra propria della superficie conica cadranno in quella parte di essa che non è figurata nella sua ortografia: pel contrario, se il medesimo punto F cadrà sotto la AC , e fuori della base, rimarranno in luce due sole parti triangolari della ortografia medesima, e la rimanente, pure triangolare, si dovrà acquerellare.

In ultimo, se si avrà nel disegno una sola porzione della superficie conica, per esempio quella avente per ortografia $mnkt$, si disegnerà la figura $ABCD$, onde poter usare la regola esposta per trovare, ecc.; ma nel disegno si segnerà la sola porzione rx e le altre analoghe che cadranno nell'ortografia della data porzione della superficie conica che si vorrà acquerellare.

OSSERVAZIONE 7. Alcune volte la porzione della superficie conica che si dovrà acquerellare, avrà tali dimensioni che l'estensione della tavoletta, sulla quale si faranno i disegni, non sarà sufficiente per eseguire su di essa tutte le operazioni necessarie per determinare le proiezioni dei contorni dell'ombra propria della superficie medesima: in questi casi, molto frequenti in pratica, si potrà procedere come segue:

Il disegnatore, avendo riguardo alle dimensioni della sua tavoletta ed a tutte le operazioni necessarie per determinare colla regola esposta le proiezioni del contorno dell'ombra propria di una superficie conica, concepirà facilmente per approssimazione la maggiore altezza che potrà avere una superficie conica, acciocchè le operazioni

suddette siano per questa superficie eseguibili tutte per intero sulla tavoletta stessa: prenda nell'asse EF (fig. 7) dell'ortografia della superficie conica $ABCD$ in quistione la parte EF non maggiore di quest'altezza, conduca le BE , CF perpendicolari all'asse, seghi CG ed FM eguali alla BE ; e poscia considerando EF come asse di un cono, ed FG il raggio della sua base, determini il punto H , come si è determinato l' O nella figura antecedente: fatto ciò, prenda FI eguale alla CF , tiri la IL perpendicolare alla CF medesima, e conduca la NL parallela alla MC ; in ultimo seghi EP eguale alla FN , e congiunga la LP ; e questa sarà l'ortografia da lui richiesta.

Dal punto V , dove s'incontrano i prolungamenti delle rette EF , BC , e dall' E immagino condotte due parallele ai raggi di luce, e prolungate sino ad incontrare il piano della base: questi due incontri ed il punto F saranno in una medesima retta, perchè trovansi e nel piano della base ed in quello delle due parallele ai raggi di luce; più le loro distanze dal punto F saranno proporzionali agli assi FV , FE dei due coni. Ma a questi assi sono evidentemente proporzionali anco le CF ovvero IF , FH ; adunque le distanze medesime risulteranno anch'esse proporzionali alle rette IF , FH .

Ora sia congiunto il punto H a quello dei medesimi due punti d'incontro che è più vicino all' F , ed il punto I all'altro, e si avranno due triangoli aventi l'angolo in F comune, ed i lati intorno a quest'angolo proporzionali, per quello che si è detto poc'anzi; conseguentemente questi due triangoli saranno simili, per cui i loro angoli in S ed in H , opposti a lati omologhi, saranno fra loro eguali; quindi l'angolo in I sarà anch'esso retto, per esserlo il suo eguale in H , stante la costruzione supposta eseguita per determinare il punto H medesimo.

Essendo retto l'angolo in I , cioè l'angolo compreso dalla retta IF e dall'altra tirata dal punto I medesimo a quello dove la parallela ai raggi di luce che passa pel V incontra il piano della base, la seconda di queste medesime due rette risulterà tangente la periferia della base stessa, e tangente propriamente in I , ove incontra il raggio FI ; e per conseguenza il punto L , determinato col condurre IL perpendicolare alla CF , sarà nell'ortografia dimandata per la proposizione esposta.

Le FE , BC e l'ortografia dimandata, essendo tre rette concorrenti al medesimo punto V , segheranno le due parallele CF , BE in parti proporzionali; e però dovrà essere la porzione della BE , compresa fra E e l'ortografia richiesta, quarta proporzionale dopo le tre rette CF , FL , BE . Ma appunto per essere le FM , FN eguali rispettivamente alle BE , EP , e la LN parallela alla CM , la EP è quarta proporzionale dopo le dette CF , FL , BE ; adunque il punto P sarà il segmento fatto alla EB dall'ortografia dimandata. Quindi nella retta LP , che unisce i due punti L , P , avrassi la stessa ortografia richiesta; come nella IF evidentemente si avrà la sua icnografia, se DC esprimerà la retta comune ai due piani ortografico ed icnografico.

In fine tutto ciò che ho detto nella tacita supposizione che il vertice della superficie conica cada superiormente al piano icnografico con poche modificazioni e facilmente praticabili, si estende anche al caso che il medesimo sia sotto il piano stesso.

DE' CONTORNI

DELLE OMBRE PROPRIE DELLE SUPERFICIE SFERICHE.

A tutti è nota la superficie sferica: essa ha la proprietà caratteristica che tutti i suoi punti sono egualmente distanti da un medesimo punto, il quale dicesi *centro* della sfera.

In virtù di questa proprietà caratteristica della superficie sferica sarà essa data e di posizione e di grandezza, o sia affatto conosciuta, quando sarà dato il suo centro e la distanza da questo punto alla superficie di essa, cioè il suo raggio.

L'ortografia e l'icnografia di una superficie sferica sono evidentemente due cerchi aventi i centri, l'uno nell'ortografia e l'altro nell'icnografia del centro di essa, ed i raggi eguali a quello della sfera medesima.

PROPOSIZIONE III.

Data l'ortografia di una sfera, trovare quella del contorno dell'ombra propria di essa.

I piani ortografico ed icnografico passino pel centro della sfera, ed $AEBD$ sia l'ortografia di essa.

Nel cerchio $AEBD$ si tirino i due diametri AB , DE ; il primo parallelo, e l'altro perpendicolare alla O ; facciasi l'angolo FCD eguale al Δ , e si tiri FG perpendicolare al diametro AB : fatto questo, descrivasi la semiperiferia DGE dell'ellisse concentrica al cerchio dato, e che ha per semiassi CE , CG ; e sarà questa l'ortografia dimandata.

Dal segmento F si tiri l' FH tangente la periferia EFL , e risulterà l'angolo FHC eguale all' FCD , cioè eguale all'angolo Δ .

Ora la semiperiferia $ADFB$ insieme alle rette FG , FH , rotando in avanti attorno al suo diametro AB , si disponga perpendicolarmente al piano $ADBE$: in questa nuova situazione risultando FG perpendicolare al piano ortografico, e la FH parallela ai raggi di luce e tangente la superficie sferica, il punto F di contatto troverassi nel contorno dell'ombra propria, ed il punto G , piede della perpendicolare tirata da questo punto al piano ADB o sia ortografico, apparterrà all'ortografia dimandata.

Similmente nella semiperiferia circolare $adfb$ descritta sulla corda ab parallela al diametro AB , fatto l'angolo fcd eguale all' FCD , condotta l' fh tangente, e l' fg perpendicolare alla ah , cioè fatto per la corda ab ciò che si è fatto pel diametro AB , risulterà l'angolo fhc eguale all' fcd , ed il punto g apparterrà alla medesima ortografia richiesta.

Essendo gli angoli fcg , FCC eguali, e gli fgc , FGC ambedue retti, i triangoli cfg , CFG saranno simili; e però sarà

$$cg : cf = CG : CF, \text{ o sia } cg : bc = CG : BC;$$

vale a dire un'ordinata qualunque dell'ortografia del contorno dell'ombra alla corrispondente della periferia AEF , costantemente, come $CG : BC$. Quindi l'ortografia $EgGD$

sarà la periferia dell'ellisse concentrica al cerchio AEF , ed avente per due semiassi le rette CE , CG ; ciò che ecc.

OSSERVAZIONE 1. Denominate le rette CE , CG , Cc , cg rispettivamente r , b , x' , y' , la porzione anzi esposta dà

$$y'^2 : r^2 - x'^2 = b^2 : r^2, \text{ o pure } r^2 y'^2 + b^2 x'^2 = b^2 r^2$$

per equazione dell'ellisse EgD ; e posta y la perpendicolare tirata dal punto g all'orizzontale LM asse, ed x la porzione della CI intercetta fra questa perpendicolare ed il punto C , c il coseno ed s il seno dell'angolo BCI , coll'ordinario metodo delle trasformazioni delle coordinate si trova facilissimamente

$$y' = cx - sy, \text{ ed } x' = sx + cy.$$

Sostituendo questi valori delle y' , x' nell'equazione anzi esposta dell'ellisse EgD , ed ordinando la risultante rispetto alla y , si ottiene

$$y^2 - 2 \frac{cs(r^2 - b^2)x}{r^2 s^2 + b^2 c^2} y = \frac{b^2 r^2 - (c^2 r^2 + b^2 s^2)x^2}{r^2 s^2 + b^2 c^2}$$

per equazione fra le nuove coordinate x, y della medesima ortografia in quistione.

Supponendo $y = 0$ in quest'ultima equazione, si ha

$$b^2 r^2 = (c^2 r^2 + b^2 s^2) x^2;$$

e però la porzione del raggio CI intercetta fra il centro C ed il punto ove il medesimo raggio vien segato dalla periferia ellittica, cioè Cv , sarà eguale ad

$$rb : \sqrt{(c^2 r^2 + b^2 s^2)};$$

e determinando l'ascissa x , che entra nella medesima equazione, per modo che soddisfi la condizione

$$c^2 s^2 (r^2 - b^2)^2 x^2 = \{ (c^2 r^2 + b^2 s^2) x^2 - b^2 r^2 \} (c^2 r^2 + b^2 c^2),$$

cioè che i due valori dell'ordinata corrispondente, dedotti dalla medesima equazione, siano fra loro eguali, ottiensi

$$x = \sqrt{(r^2 s^2 + b^2 c^2)}, \text{ ed } y = (r^2 - b^2) sc : \sqrt{(r^2 s^2 + b^2 c^2)};$$

valori i quali esprimeranno le coordinate del punto a cui corrisponde la massima ascissa, stante la proprietà a cui soddisfa il valore della x , di rendere cioè eguali i due corrispondenti della ordinata y .

OSSERVAZIONE 2. Siano tirate dai punti B, G le rette Bm, Bq, Gn, Gp perpendicolari rispettivamente alle CI, CK , ed avrassi $Cn = CG \text{ sen. } ICG = bs$, $Cm = BC \text{ sen. } ICG = rs$, $Cp = bc$, e $Cq = rc$; e però il massimo valore dell'ascissa, cioè

$$\sqrt{(r^2 s^2 + b^2 c^2)} \text{ sarà eguale alla radice quadrata di } \overline{Cm}^2 + \overline{Cp}^2, \text{ e}$$

la distanza Cv ad rb diviso per quella di $\overline{Cn}^2 + \overline{Cq}^2$;

o sia l'ascissa massima eguaglierà la retta mp , e la distanza fra il centro ed il punto dove la periferia ellittica sega il raggio CI , cioè Cv , sarà quarta proporzionale dopo le tre rette nq, CG, CI . Cosicchè, prendendo CN eguale alla nq , e dal punto G tirando la parallela alla NI , questa incontrerà la CI nel punto medesimo ove sarà essa segata dalla periferia ellittica EgD .

Avrei potuto costruire anche il valore esposto dalla y corrispondente all'ascissa massima, come ho costruito i due della x ; ma sarà meglio determinarlo col metodo seguente, o col lemma decimo.

Alla estremità dell'ascissa massima, già determinata, si tiri la verticale, e si estenda sino a segare il prolungamento del diametro DE ; e da questo segmento tirisi una tangente la periferia EbI , e dal punto di contatto la perpendicolare alla CE , che nel segmento di questa colla verticale anzidetta saravvi evidentemente il punto della periferia ellittica, al quale corrisponde la massima ascissa.

Così il segmento v della periferia ellittica col raggio CI si potrà anche esso determinare, prolungando FG sino in M , conducendo la MP perpendicolare all'asse LM ed eguale all' FG , ed al punto Q , dove la retta CP sega la periferia IBL , tirando la Qv perpendicolare al raggio CI , giacchè il segmento di questo colla stessa perpendicolare sarà il punto dimandato.

Di fatto nel piano, lemma terzo, dell'estremo dell'ombra propria della sfera s'immagini la retta che ha l' FM per ortografia, la quale sarà parallela alla DE , ed avrà la distanza dal piano ortografico eguale alla FG ; e suppongasi prolungata sino ad incontrare il piano icnografico: evidentemente il punto d'incontro avrà M per ortografia; e però ammesso il triangolo MPC nel medesimo piano icnografico, il punto P cadrà in questo incontro, e la retta CP nella traccia icnografica del piano del contorno dell'ombra. Quindi il punto Q coinciderà col segmento di questa traccia e di quella della sfera, o sia sarà v il segmento della periferia ellittica esprimente l'ortografia in quistione e del raggio CI , come ho asserito.

COROLLARIO 1. Nella ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione che fissano generalmente i disegnatori, l'angolo BCI risulta semiretto, ed il quadrato della FG dop-

pio di quello della CG ; e però $c^2 = s^2 = \frac{1}{2}$, e $b^2 = \frac{1}{3}r^2$. Quindi sarà

$$Cv = br : \sqrt{(r^2 c^2 + b^2 s^2)} = r : \sqrt{2};$$

cioè il segmento che fa la periferia ellittica al raggio CI , sarà nella perpendicolare condotta dal punto E al medesimo raggio CI . Similmente si ottiene l'ascissa massima

$$\sqrt{(r^2 s^2 + b^2 c^2)} = r \sqrt{\frac{2}{3}} = CG \cdot \sqrt{2},$$

e l'ordinata corrispondente, cioè

$$(r^2 - b^2) : \sqrt{(r^2 s^2 + b^2 c^2)} = r \sqrt{\frac{2}{3}};$$

valori i quali insegnano che tanto la massima ascissa, quanto l'ordinata corrispondente eguagliano in questo caso la CM ; e però saranno amendue determinabili facilissimamente.

Nella ipotesi che i raggi di luce abbiano l'anzidetta direzione, condotta dal punto B una tangente eguale alla corda BD , e congiunta l'altra sua estremità al centro C ; questa retta segnerà la periferia EBL nello stesso punto F .

OSSERVAZIONE 3. La parte del cerchio $ADBE$ che si dovrà acquerellare, sarà $EGDQE$, ovvero $EGDAE$, secondo che i raggi di luce saranno diretti come nell'osservazione

prima della prima proposizione, o pel verso affatto contrario: queste parti si ridurranno agli stessi semicerchj DBE , DAE quando i raggi di luce saranno paralleli al piano ortografico.

OSSERVAZIONE 4. Tutto ciò che ho detto per l'ortografia del contorno dell'ombra propria della superficie sferica, vale anche per l'icnografia del medesimo, purchè s'intenda che il cerchio EBL esprima l'icnografia della sfera, il diametro AB sia parallelo alla I , e che l'angolo DCF eguagli Σ , cioè quello fatto dai raggi di luce col piano icnografico.

DE' CONTORNI

DELLE OMBRE PROPRIE DELL' ELLISSOIDE QUALUNQUE, IPERBOLOIDE A DUE FOGLIE E PARABOLOIDE ELLITTICA.

Due ellissi abbiano un asse comune ed i loro piani perpendicolari, ed un piano sia perpendicolare al loro asse comune: unendo i due punti dove questo piano sega la periferia di una delle due ellissi, ed anco i due ove sega quella dell'altra, hansi due rette terminate e fra loro perpendicolari. S'immagini costituita l'ellisse che ha queste due rette per assi, e fatta una simile operazione per tutti i piani che si possono immaginare perpendicolari allo stesso asse comune alle ellissi suddette, si avranno infinite periferie ellittiche fra loro simili. La superficie nella quale si trovano tutte queste periferie ellittiche, e che dir si potrebbe costituita da esse medesime, chiamasi *ellissoide*.

Così se due iperbole avranno un asse comune ed i loro piani perpendicolari, e si farà per un piano perpendicolare al prolungamento dello stesso asse comune un'operazione affatto simile a quella immaginata poc' anzi per l'ellissoide, si avranno infinite ellissi simili, le quali saranno in una medesima superficie: questa si chiamerà *iperboloide a due foglie*.

Similmente, sostituendo alle iperbole anzidette due parabole apolloniane, e facendo la suddetta operazione, avransi infinite ellissi simili, le quali costituiranno la superficie detta *paraboloide ellittica*.

Sebbene queste tre superficie non s'incontrino sì spesso nelle arti, come la sferica, non ostante io le tratto quasi egualmente che quella per soddisfare il desiderio di alcuni artisti, cioè di avere anche per esse delle proposizioni analoghe a quelle che ho fissato di esporre per la sferica.

Le due ellissi nell'ellissoide, le due iperbole nell'iperboloide, e le due parabole nella paraboloide, le quali hanno l'asse comune ed i loro piani fra loro perpendicolari, e che si sono immaginati per definire le medesime superficie, si chiameranno *sezioni principali*, e saranno esse le linee che io supporrò conosciute, come lo sono generalmente nelle arti, onde individuare ciascuna di esse superficie.

Nelle proposizioni che verranno dichiarate rispetto alle tre superficie qui definite, ammetterò generalmente verticale il suddetto asse comune alle due sezioni principali; più supporrò il piano di una di esse sezioni nello stesso ortografico, e conseguentemente quello dell'altra parallelo al piano dei profili, e nominerò particolarmente la prima di esse *prima sezione*, e l'altra *seconda sezione*. Così, per semplicità, indicherò sempre la prima sezione colla linea che denominerò *AVB*, ed il suo asse comune anco alla seconda colla retta *VT*, *V* indicando il vertice della sezione medesima.

PROPOSIZIONE IV.

Trovare l'ortografia del contorno dell'ombra propria di una qualunque delle tre superficie anzi definite, conosciute e collocate come si è detto qui sopra.

Dai punti *D, d* (fig. 9) della linea *AVB* si conducano le *DE, de* parallele alla *O*, e lungo ad esse s'immaginino due piani perpendicolari all'*AVB*; le sezioni che questi piani faranno alla superficie di second'ordine, saranno o ellissi od iperbole, oppure parabole; cioè saranno ellissi per qualunque superficie di second'ordine, *lemma quarto*, se le rette *DE, de* segheranno la linea *AVB* in due punti; parabole nella paraboloide ed iperboloide se risulteranno esse rette parallele pel primo all'asse, e pel secondo ad uno degli asintoti della prima sezione, *lemmi quinto e sesto*; iperbole saranno per la sola iperboloide, qualora la retta condotta pel centro della prima sezione parallelamente alle *DE, de* cada nell'angolo degli asintoti in cui cadrà la medesima prima sezione, *lemma settimo*.

Incomincerò a soddisfare la proposizione nel caso che queste sezioni siano ellittiche, o sia che la linea *AVB* seghi in due punti ciascuna delle rette *DE, de*, che è quello che ha generalmente luogo; e poscia la soddisfarò per gli altri due casi, cioè quando le sezioni anzidette riescono paraboliche, e quando sono iperboliche.

PRIMO CASO.

Si tiri il diametro *FfL* della prima sezione che sega in parti eguali ciascuna delle corde *DE, de*; e pei punti, ove la parte anteriore del contorno dell'ombra taglia le periferie delle due sezioni, suppongansi condotte due rette perpendicolari al piano *AVB*, ed altre due parallele ai raggi di luce: i piedi *P, p* delle perpendicolari, i quali trovansi nelle *DE, de*, saranno evidentemente le ortografie dei medesimi segmenti, e le altre due rette, per essere parallele ai raggi di luce, saranno quelle tangenti delle sezioni ellittiche che faranno cogli assi *DE, de* angoli eguali al Δ , ovvero saranno queste due rette generatrici della superficie involvente.

Le rette *FP, fp* risultando le stessissime ascisse corrispondenti ai punti di contatto tra ciascuna sezione ellittica e le loro tangenti suddette, le quali fanno cogli assi *DE, de* angoli fra loro eguali, ed essendo queste medesime sezioni ellissi simili, come si dimostra nel *lemma ottavo*, avrassi

$$FE:FP=fe:fp.$$

Quindi l'ortografia del contorno dell'ombra sarà una linea di second'ordine della stessa specie della prima sezione, avrà comune con questa il diametro

che troverassi nella retta FL , che divide ciascuna delle corde DE , de in due parti eguali, e toccherà in L tangenzialmente la medesima sezione prima, cioè nello stesso punto di contatto della sua tangente parallela all'ortografia O .

L'anzidetta sezione ellittica avente per uno degli assi la retta DE dà

$$DC \cdot CE = \overline{DF}^2 = C^2 : F^2, \text{ ovvero } M^2 : \overline{DF}^2 = C^2 : F^2,$$

C ed F esprimendo le ordinate rettangole della medesima sezione e corrispondenti ai punti C , F , ed M la media proporzionale geometrica fra le rette CD , CE ; e però sarà

$$M : DF = C : F;$$

proporzione dalla quale si desume facilmente la lunghezza dell'altro asse della medesima sezione ellittica.

Ora, conoscendo i due semiassi di questa sezione ellittica, e sapendo d'altronde che FP debb'essere la sua ascissa centrale corrispondente al punto ov'è toccata dalla tangente che fa coll'asse DE l'angolo eguale al Δ , la medesima retta FP si potrà determinare col *lemma nono* o col *decimo*.

Determinata la lunghezza della FP , si costruisca il triangolo equilatero LMN (fig. 10), che abbia i lati eguali alla EF , si prenda MS eguale alla FP , e si congiunga la LS : fatto ciò, prendansi le Lm , Ln amendue eguali alla fe , congiungasi la msn , e si porti nella ef dal punto f verso l' e , la fp eguale alla ms , che il punto p , così determinato, apparterrà all'ortografia richiesta.

Imperciochè, essendo la retta mn parallela alla MN , si ha

$$MN : MS = mn : ms, \text{ ovvero } FE : FP = fe : ms,$$

per essere le MN , MS , mn eguali ordinatamente alle FE , FP , fe ; ma per quello che sopra ho dimostrato, hassi anche

$$FE : FP = fe : fp;$$

sarà adunque fp eguale ad ms . Quindi il punto p apparterrà veramente all'ortografia in quistione, come ho asserito.

Nel modo stesso che si è trovato il punto p , si potranno determinare quanti altri punti si vorranno dell'ortografia PpL --, e conseguentemente descrivere la medesima.

SECONDO CASO.

Nella paraboloide, siccome le sezioni fatte dai piani perpendicolari all' AVB (fig. 11), e condotti lungo le rette DE , de parallele alla VT asse, sono tante parabole eguali, come si dimostra nel *lemma sesto*; così saranno eguali anco le distanze DP , dp fra i vertici D , d e le ortografie dei segmenti di esse coll'estremo dell'ombra, essendo queste distanze le stessissime ascisse corrispondenti ai punti dove esse parabole sono toccate tangenzialmente dalle rette parallele ai raggi di luce, le quali fanno evidentemente angoli eguali cogli assi DE , de .

Quindi l'ortografia dimandata sarà in questo caso una parabola eguale perfettamente alla prima sezione principale ed avente l'asse nella medesima retta VT .

L'asse della parabola avb essendo nella VT , il suo vertice sarà l'ortografia del punto di contatto fra la seconda sezione e la sua tangente, che fa coll'asse VT l'angolo eguale al Δ ; e però, siccome la seconda sezione ha il vertice in V , per asse VT , e di essa si conosce almeno un altro punto; così la distanza Vv od ascissa corrispondente al punto di contatto anzidetto si potrà determinare col *lemma undecimo*.

Trovata la lunghezza della Vv , si descriverà facilmente la parabola avb , o ricopiando opportunamente la stessa AVB , ovvero conducendo le rette DP, dp parallele ed eguali alla stessa Vv , giacchè i punti P, p --, determinati in tal guisa, apparterranno all'ortografia dimandata.

Nell'iperboloide essendo le rette DE, de (fig. 12) parallele ad una delle NM, NS asintoti della prima sezione, per esempio alla NS , le sezioni fatte ad essa dai piani immaginati secondo queste rette saranno parabole, *lemma quinto*, aventi i parametri proporzionali alle rette NR, Nr ; e però le distanze DP, dp fra i vertici D, d di queste parabole e le ortografie dei loro segmenti col contorno dell'ombra dovranno essere proporzionali alle medesime rette NR, Nr , essendole ai parametri anzidetti, *osservazione prima del lemma nono*. Ma queste rette diminuiscono evidentemente a misura che i punti D, d si avvicinano all'asintoto NS , e finalmente svaniscono insieme colle distanze che hanno questi punti D, d dall'asintoto medesimo;

Adunque l'ortografia richiesta in questo caso ha anch'essa la retta NS per asintoto, ed è essa una linea di second'ordine per essere proiezione di un'altra pure di second'ordine, *lemma terzo*; quindi sarà anch'essa una iperbola.

Per descriverla, si faccia TV eguale alla TD , e TX all'ordinata della seconda sezione e corrispondente alla sua ascissa VT , si tiri XQ perpendicolare alla XV , ed avrassi nella TQ il parametro della parabola suddetta, che ha per asse la DT ed il vertice in D : ciò fatto, *lemma undecimo*, si determini la DP , e poscia si trovi la quarta proporzionale dopo le rette NR, DP, Nr , e si seghi della de la parte dp eguale a questa quarta proporzionale, e si avrà il punto p qualunque dell'ortografia dimandata.

Queste quarte proporzionali si potranno determinare con facilità, come si è trovata fp alla fine del caso antecedente, sostituendo alle rette FE, FP, fe della figura nona le RN, DP, rR della presente.

TERZO CASO.

Finalmente abbia luogo l'ultimo caso della proposizione, cioè nell'iperboloide la retta ND (fig. 13) parallela alla O , e condotta per N centro della prima sezione, seghi la sezione medesima o sia attraversi l'angolo MNS compreso dagli asintoti di essa sezione: in questo caso le sezioni fatte all'iperboloide secondo le rette DE, de saranno tante iperbole, *lemma settimo*, aventi i vertici in D, d , ed i centri in N, n punti della Nn -- diametro secondario della prima sezione e parallelo alla sua tangente in D ; più saranno queste iperbole fra loro simili, come si dimostra nel *lemma medesimo*; e però le distanze fra i vertici D, d e le ortografie dei loro segmenti coll'estremo dell'ombra risulteranno proporzionali ai semidiametri ND, nd , *osservazione prima del lemma nono*; cioè sarà

$$ND : DP = nd : dp.$$

Quindi per essere le rette ND , nd ordinate della prima sezione rispetto ai diametri coniugati-- nN , EN , l'ortografia dimandata sarà anch'essa un'iperbola.

Per descriverla, determinata che si avrà una distanza DP , si procederà in un modo in tutto simile a quello usato nel primo caso, sostituendo alle rette FE , FP , fe , fp della figura nona rispettivamente le altre quattro ND , DP , nd , dp di questa.

OSSERVAZIONE. Tutto ciò che ho detto nell'ipotesi che l'asse comune alle sezioni prima e seconda fosse verticale, vale anco pel caso che l'asse medesimo sia disposto comunque nel piano ortografico, purchè in questo piano vi sia sempre anche la prima sezione.

PROPOSIZIONE V.

Trovare l'icnografia del contorno dell'ombra propria di una paraboloide, conoscendosi AVB (fig. 14) ortografia, ed arbf traccia icnografica di essa superficie.

Lungo le rette de , fg parallele alla I siano condotti due piani verticali, e le loro sezioni colla paraboloide saranno due parabole eguali, aventi i loro assi nelle verticali $s-TV$, $l-tv$, lemma sesto; e pei segmenti del contorno dell'ombra propria e di queste parabole suppongansi tirate due parallele ai raggi di luce, e queste risulteranno due tangenti delle medesime parabole, e facenti angoli eguali fra loro cogli assi di esse, perchè sono esse rette generatrici della superficie involvente. Quindi le distanze fra i punti s , l ed i due P , p icnografie dei medesimi segmenti saranno fra loro eguali, e conseguentemente l'icnografia in quistione sarà una retta.

Pertanto se dal punto β di contatto fra la retta parallela alla O e la linea AVB si condurrà βC perpendicolare alla ab , e dal punto C , il quale rappresenta l'icnografia di un punto del contorno dell'ombra propria della paraboloide, si condurrà $\xi\mu$ parallela alla hm , che divide per mezzo le corde fg , de , otterrassi nella stessa $\xi\mu$ l'icnografia dimandata.

OSSERVAZIONE 1. Nell'ordinaria ipotesi rispetto ai raggi di luce essendo sC eguale alla metà del parametro della prima sezione, sarà anche sc eguale alla metà del parametro della seconda sezione; e perciò, prendendo le rette sC , sc eguali rispettivamente alla metà dei parametri della prima e seconda sezione, e congiunti i punti C , c , avrassi nella retta indefinita -- $\xi c C\mu$ -- l'icnografia dimandata senza alcun'altra operazione.

OSSERVAZIONE 2. Se dai segmenti ξ , μ dell'icnografia $\xi\mu$ e della periferia ellittica $aefd$, i quali si possono determinare, lemma ventiquattresimo, anche senza descrivere questa periferia ellittica, si condurranno due rette perpendicolari alla AB , avransi i punti α , δ , dove l'orizzontale AB sarà segata dalla $\alpha\beta\delta$ ortografia del contorno dell'ombra propria della paraboloide; e ciò senza bisogno di delineare la medesima ortografia.

PROPOSIZIONE VI.

Trovare l'icnografia del contorno dell'ombra propria di una iperboloide, disposta e conosciuta come la paraboloide nella proposizione antecedente.

Ritenute tutte le convenzioni del lemma dodicesimo, siano condotti per le rette de , fg due piani verticali, e pei punti, ove le iperbole risultanti sono segate dal contorno

dell'ombra, s'immaginino due rette parallele ai raggi di luce, e queste saranno al solito due di quelle tangenti di queste iperbole facenti coi loro assi verticali angoli eguali; e perciò le distanze sP , lp , le quali eguagliano quelle fra i punti di contatto ed i prolungamenti degli assi medesimi, saranno proporzionali alle lunghezze di questi assi, *osservazione prima del lemma nono*. Ma questi assi sono i doppi delle ordinate verticali della sezione fatta all'iperboloide col piano verticale che passa per hm , e riferite ai due assi di essa; adunque anche i punti P , p saranno in una iperbola.

Per delineare questa iperbola, disegnata la sezione verticale che passa per hm , procederassi come nella prima parte della proposizione quarta.

Quando l'iperboloide sarà di rotazione, la sezione fatta verticalmente dal piano passante per la retta hm eguaglierà perfettamente la stessa prima sezione.

OSSERVAZIONE 1. Dal segamento che fa questa iperbola alla periferia ellittica $aefb$, condotte due perpendicolari alla AB , nei loro piedi avransi i segamenti della stessa AB e dell'ortografia del contorno dell'ombra senza punto descrivere la medesima ortografia.

OSSERVAZIONE 2. L'icnografia dell'ombra propria di una ellissoide si determinerà precisamente come si trova la sua ortografia, sostituendo però al piano verticale AVB (fig. 9) quello dell'icnografia, alla retta O la I , ed alla prima sezione quella fatta alla medesima ellissoide dal piano orizzontale condotto pel suo centro: i segamenti della ortografia del contorno dell'ombra e della orizzontale condotta pel centro della prima sezione si possono avere facilmente nel seguente modo, senza descrivere l'icnografia medesima.

Sia $oemd$ (fig. 14) l'icnografia della detta sezione orizzontale o sia della stessa ellissoide.

Si trovino le ascisse centrali della $dh\mu$ prese nella ab e corrispondenti ai punti di contatto fra essa icnografia e le sue tangenti parallele alla I , *lemma decimo*, e nei termini laterali di esse ascisse avransi i segamenti dimandati.

DE' CONTORNI

DELLE OMBRE PROPRIE DELLE SUPERFICIE DI ROTAZIONE.

Una retta ed una linea qualunque siano unite fra loro invariabilmente; facendo rotare la retta intorno a due punti di essa, senza che essi cambino la loro posizione che hanno nello spazio, la linea qualunque fissamente unita a questa retta genera una superficie che si chiama di *rotazione*.

La retta che passa costantemente pei due punti individuati dello spazio, chiamasi *asse di rotazione*, o semplicemente *asse* della superficie di rotazione; e l'altra linea, di qualunque specie sia, dicesi *linea generatrice* della superficie stessa.

La superficie di quel corpo, chiamato comunemente dagli architetti *toro ordinario*, è una superficie di rotazione, la quale ha per generatrice una semiperiferia circolare, il cui piano passa per l'asse di rotazione, ed il cui diametro, base di essa, trovasi parallelo al medesimo asse.

Dalla definizione qui data della superficie di rotazione ne discende immediatamente che una superficie di rotazione sarà affatto affatto individuata, qualora lo sia il suo asse ed una sua generatrice; che la linea comune ad una di queste superficie ed al piano perpendicolare all'asse sarà sempre la periferia di un cerchio avente il centro nell'asse medesimo; in terzo luogo, che le sezioni fatte ad una di esse con piani passanti per l'asse di rotazione risulteranno altrettante linee fra loro eguali perfettamente, e ciascuna delle quali esprimerà una generatrice piana della superficie medesima. A queste verità, per sè medesime evidenti, appoggerò tutto quello che dirò delle superficie di rotazione.

PROPOSIZIONE VII.

Trovare l'ortografia e l'icnografia del contorno dell'ombra propria di un toro ordinario avente l'asse di rotazione verticale, conoscendosi quest'asse medesimo e la semiperiferia generatrice della superficie di esso.

Sia bb l'ortografia, e C l'icnografia (fig. 15 e 16) dell'asse di rotazione; e la semiperiferia faf , la cui base ff è parallela alla bb , sia l'ortografia, e la retta AF l'icnografia della data generatrice; cioè l'ortografia del toro sia espressa dal quadrilatero $afed$ composto del rettangolo $ffdd$ e dei semicircoli faf , ded , che hanno per diametri le verticali ff , dd , e l'icnografia del medesimo sia indicata dai cerchi APE , FOD concentrici in C .

Sebbene nella figura si esprima che AE è la retta attorno cui ha rotato il piano ortografico per adattarsi all'icnografico, nulladimeno onde semplificare i ragionamenti, senza complicare maggiormente la figura, supporrò la retta comune ai due piani ortografico ed icnografico la ace , o sia che il piano icnografico passi lungo l'orizzontale che unisce i centri dei due semicircoli faf , ded .

Si tiri CV parallela alla I , costruiscasi il triangolo CGH rettangolo in C , che abbia il lato CG eguale alla AF , e l'angolo CHC eguale al Σ ; descrivasi l'arco circolare CL , facendo centro in C , e si descriva pure il semicerchio CUH . Fatto questo, si tiri la retta CT , la quale sarà segata in n dalla semiperiferia CUH , prendasi la Cr eguale alla Cn , si unisca la Cr , e dal punto s , dove questa è segata dall'arco CsL , tirisi la st perpendicolare alla CG : prendendo la OM eguale alla Gt , il punto M apparterrà alla icnografia del contorno dell'ombra propria del toro; e conducendo la Mc parallela alla Cc , e segnando mI eguale alla ts , avrassi il punto m della ortografia del contorno dell'ombra propria del medesimo toro.

Immagino il piano verticale lungo la retta CT ; la sezione comune ad esso piano ed alla superficie anteriore del toro sarà la semiperiferia circolare che ha il centro in O ed il vertice o sia il suo punto di mezzo in P .

Il punto comune a questa semiperiferia ed al contorno dell'ombra del toro verrà nominato particolarmente *segamento*; e la sua ortografia ed icnografia saranno i due punti che si avranno singolarmente di vista in ciò che segue.

Essendo il toro una superficie di rotazione, il piano tangente ad esso nel segmento sarà perpendicolare al piano verticale immaginato secondo la CT ; giacchè è una proprietà di qualunque superficie di rotazione, che un piano tangente ad essa è sempre perpendicolare al piano condotto pel punto di contatto e per l'asse della medesima superficie, il quale è in questo caso la verticale che passa pel punto C ; e per conseguenza la *proiezione ortogonale* su questo piano verticale, di una linea situata nel piano tangente, sarà la stessa retta sezione comune a questi medesimi due piani.

La linea che passa pel segmento parallelamente ai raggi di luce, per essere tangente al toro, giace nel piano tangente ad esso nel medesimo punto; e però la sua proiezione ortogonale sul piano verticale immaginato, per quello che si è detto poc' anzi, sarà la stessa retta comune sezione di questi due piani. Ma il piano tangente al toro nel segmento lo è anche alla semiperiferia verticale che ha il centro in O ed il suo vertice in P ; imperciocchè un piano tangente ad una superficie è anco tangente a tutte le linee disegnate in essa e che passano pel punto di contatto; adunque la proiezione ortogonale, qui nominata, sarà essa pure tangente la medesima superficie.

Vale a dire la proiezione ortogonale sul piano verticale, immaginato secondo la CT , della retta parallela ai raggi di luce, e che passa pel segmento, è tangente nel segmento stesso alla semiperiferia avente il centro in O ed il vertice in P .

Ora questa semiperiferia verticale rotando attorno al raggio OP , insieme alla sua tangente di cui si è parlato qui sopra, si adatti al piano orizzontale APE , ed in questa situazione una sua parte sia rappresentata dalla PN , e la tangente dalla retta NT .

Condotta NM dal punto di contatto N perpendicolarmente alla CT , il punto M sarà evidentemente l'*icnografia* del segmento, ed il punto m distante dalla ae di im eguale alla MN , e situato nella M_1 parallela alla Cc , sarà l'ortografia del medesimo segmento; e tirato il raggio NO , l'angolo risultante MNO eguaglierà NTM , cioè l'angolo acuto che fa colla orizzontale CT la proiezione ortogonale della retta parallela ai raggi di luce, e di cui ho parlato poc' anzi.

È dichiarato adunque che nel triangolo MON , il quale ha ON ipotenusa eguale alla retta AF , e l'angolo acuto MNO eguale a quello compreso dalla orizzontale CT e dalla suddetta proiezione ortogonale, è dichiarato, dico, che il suo cateto OM opposto a questo angolo acuto indica la distanza che ha l'*icnografia* del segmento dal punto O , e l'altro MN quanto sia il medesimo segmento disotto del piano orizzontale che passa per la retta ae , ovvero la distanza della sua ortografia m dalla stessa retta ae .

Supposto che il triangolo CGH , rotando attorno al suo lato CH orizzontale, si disponga verticalmente disotto del medesimo, e poscia sia proiettato ortogonalmente sul piano verticale immaginato lungo CT , egli è evidente che questa sua proiezione sarà un triangolo rettangolo anch'esso in C , che avrà un cateto orizzontale, il quale sarà la stessa retta Cn , e per ipotenusa la proiezione ortogonale della ipotenusa di CGH , quando questo si trova collocato verticalmente, come ho supposto.

Ma l'ipotenusa del triangolo CGH in questa posizione verticale è parallela ai raggi di luce, e però a quella retta tangente al toro nel segmento e parallela anch'essa ai medesimi raggi; adunque l'angolo in n del triangolo rettangolo situato verticalmente sotto la Cn sarà eguale all'angolo MTN , perchè le proiezioni su di un medesimo piano delle rette parallele sono altrettante rette pure fra loro parallele.

Il triangolo rettangolo GCr e quello posto verticalmente sotto la Cn avendo per costruzione i cateti Cr , Cn eguali, e gli altri due pure eguali, saranno essi triangoli perfettamente eguali; e perciò l'angolo GrC del piano eguaglierà quello in n dell'altro; e siccome quest'ultimo si è veduto essere eguale all' MTN , e GrC lo è evidentemente al Gst ; così l'angolo MTN eguaglierà il Gst .

Adunque i triangoli Gst , MON per avere le ipotenuse eguali ambedue alla AF , e gli angoli acuti Gst , MNO eguali all' MTN , e però eguali fra loro, saranno essi triangoli perfettamente eguali. Quindi il cateto Gt del triangolo Gst indicherà esso pure, come lo indica OM , la distanza sulla OT che ha l'icnografia del segmento dal punto O ; e ts , altro cateto del medesimo triangolo Gst , esprimerà, pari al suo eguale MN , quanto debb' essere sotto della ae l'ortografia del medesimo segmento.

Conseguentemente, siccome si è preso OM eguale alla Gt , ed im eguale alla ts , sarà M l'icnografia, ed m l'ortografia del segmento in quistione, cioè del punto del contorno dell'ombra propria del toro, il quale trovasi nel piano verticale che passa per la CT . Ma nello stesso modo che si sono determinati i punti M , m , si possono trovare anche gli altri; adunque ecc.

OSSERVAZIONE 1. Si conduca la retta ML perpendicolare alla CV , si prolunghi di lK eguale ad lM , ovvero si faccia l'angolo KCV eguale al VCP , e prendasi CK eguale alla CM , e si avrà il punto K : fatto ciò, tirisi la $K2$ parallela alla Cc , e di essa si seghi la parte $2k$ eguale alla $1m$. Dicendo per la retta CK precisamente ciò che si è detto per la CM , si conclude che i punti K , k indicano l'uno l'icnografia, e l'altro l'ortografia di un punto del contorno dell'ombra propria del toro.

Similmente, tirata CQ perpendicolare alla CV , e condotta RX perpendicolare ad essa CQ , e presa BX eguale alla BR ; ovvero fatto l'angolo XCQ eguale all' RCQ , e CX eguale alla CR ; e poi tirata Xx parallela alla Cc , e segata la parte $5x$ eguale alla $3r$ determinata come la $1m$: da quanto si è detto pei punti M , m , si conclude qui pure che i due punti X , x esprimono anch'essi il primo l'icnografia, ed il secondo l'ortografia di un medesimo punto del contorno dell'ombra propria del toro.

Da ciò deriva che tutte le rette perpendicolari alle CV , CQ , ed estese da ambe le parti sino all'icnografia dell'ombra propria del toro, sono segate in due parti eguali da quella delle medesime due rette CV , CQ alla quale sono esse perpendicolari.

Se il punto R cadrà in M , sarà CR eguale alla CM ; e però CX eguale alla CK : in oltre l'angolo XCM sarà doppio di MCB , come KCM lo è del VCN , per cui la somma dei due KCM , MCX eguaglierà il doppio di quella degli altri due VCN , MCB , cioè la somma degli angoli che fanno le rette KC , XC colla CM sarà eguale a due retti; e conseguentemente le due rette KC , CX saranno in questo caso fra loro per diritto; e siccome sono anche eguali, esse esprimeranno le due metà della medesima KCX , la quale passa pel punto C ed ha i suoi termini nell'icnografia. Ma ciò che ho detto della KCX vale per qualunque retta che passi pel punto C ed abbia i termini nell'icnografia $IKMZ$; adunque tutte le rette che passano pel punto C ed hanno i termini loro nell'icnografia, sono segate in C in due parti eguali.

Pertanto, descritta dell'icnografia $IKMZ$ la quarta parte che cade in uno dei quattro angoli retti formati dalle rette CV , CQ e dai loro prolungamenti, facilmente determineransi i punti delle parti rimanenti tirando da ciascun punto della parte descritta tre rette, una al punto C , e le altre due perpendicolari alle CV , CQ , e prolungando ciascuna di esse rette quanto la propria lunghezza; giacchè le altre estremità, così determinate, di questi

prolungamenti saranno altrettanti punti della medesima icnografia, per quello che si è qui sopra dichiarato.

Le rette CV , CQ segando pel mezzo tutte quelle perpendicolari ad esse e che hanno i termini nell' icnografia del contorno dell' ombra propria del toro, saranno due assi della medesima icnografia; e però la segheranno in quattro parti perfettamente eguali fra loro.

Quindi, descritta una delle quattro parti anzidette, basterà copiarla opportunamente negli altri tre angoli retti, compresi dai medesimi assi, che si otterrà l'intera icnografia dimandata.

OSSERVAZIONE 2. Ammessa la coincidenza dei punti M , R , le rette k_2 , x_5 diventano fra loro eguali, e perciò i punti dell' estremo dell' ombra del toro, aventi le icnografie nei due termini di una medesima retta che passa pel punto C , hanno le ortografie l'una sotto e l'altra sopra l'orizzontale ae , ed egualmente distanti da questa retta; ed essi punti sono lontani egualmente dal piano orizzontale della stessa ae .

Essendo i punti del contorno dell' ombra propria del toro che hanno le loro icnografie nei due termini di una retta che passa pel punto C , l'uno sopra e l'altro sotto del piano icnografico, ed equidistanti da esso piano, come ho osservato, la retta che gli unisce passerà pel punto $C-c$, e sarà essa retta divisa in questo medesimo punto in due parti anch'esse eguali; e ciascuna di queste rette segnerà il contorno dell' ombra di cui si parla in due parti eguali fra loro perfettamente.

Quindi progettando il contorno dell' ombra ed il punto $C-c$ sopra un medesimo piano qualunque, le rette disegnate in questo piano che passeranno per la proiezione del punto $C-c$, ed avranno i loro termini nella proiezione del contorno dell' ombra, saranno segate nella proiezione del punto medesimo, ciascuna in due parti fra loro eguali; e la proiezione medesima del contorno dell' ombra sarà tagliata in due parti eguali da ciascuna di esse rette.

Così le rette aventi i termini nella $4y7m$ ortografia del contorno dell' ombra propria del toro, e che passano pel punto c , saranno segate in questo medesimo punto in due parti eguali, come l'ortografia medesima sarà segata in due parti eguali da ciascuna di esse rette;

E però, descritta la metà dell' ortografia colla regola dichiarata, facilmente si descriverà anche l'altra, o conducendo per ogni punto della metà descritta una retta al punto c , e prolungandola quanto la sua lunghezza, giacchè l'altra estremità di questo prolungamento sarà nell' ortografia medesima, ovvero copiando opportunamente la metà già descritta con uno di quei metodi sì noti ai disegnatori.

OSSERVAZIONE 3. Se la retta CP cadesse nella CV , il punto n cadrebbe nell' H ; e però condotta LJ parallela alla CV , e presa $9V$ eguale alla GJ , e nella $V6$ parallela alla Cc la parte $6v$ eguale alla JL , saranno V , v l'uno l' icnografia, e l'altro l' ortografia di quel punto dell' estremo dell' ombra che trovasi nel piano verticale passante lungo CV .

Essendo GJ minore della Gt , ed LJ maggiore della st , il punto V sarà uno dei due punti dell' icnografia più vicini al C , e v uno di quelli dell' ortografia che sono più lontani dalla retta ae .

Se la medesima retta CP confonderassi colla CQ , il punto n cadrà nello stesso C ; e perciò il punto dell'icnografia, il quale debb'essere nel prolungamento della Ci , sarà in Q , perchè iQ eguaglia CG , e la sua ortografia sarà evidentemente in 4, ove l'orizzontale ae è incontrata dalla Q_4 parallela alla Cc . Così per essere la CG maggiore della Gt , sarà Q uno dei due punti dell'icnografia che sono più lontani dal C , centro di essa icnografia, siccome è d'altronde per sè stesso evidente.

Nella ipotesi comunemente ammessa dai disegnatori rispetto alla direzione della luce, per essere l'angolo CHG o sia Σ eguale a quello che fa la diagonale di un cubo con una faccia di essa, dovrà essere il quadrato del lato CH doppio di quello della CG ; ma esteso l'arco CsL sino a segare la AC , essendo in questa ipotesi l'angolo ACV semiretto, hassi il quadrato della Cu doppio di quello della CG ; adunque si avrà nella Cu immediatamente, cioè senz'altra costruzione, la lunghezza della CH , che fa d'uopo conoscere per descrivere la semiperiferia CNH .

OSSERVAZIONE 4. Condotte le rette 78 , yz tangenti le periferie faf , ded e parallele amendue alla O , i punti 7 , y di contatto saranno anche quelli di contatto di esse semiperiferie e dell'ortografia $7ym$ dell'estremo dell'ombra del toro; e questi medesimi punti troveransi in una di quelle rette che passano pel punto c .

Se interesserà molto la posizione del punto 7 , in vece di determinarlo col condurre la tangente 78 , tirerassi pel centro del quadrante $f7a$ la retta facente disotto della ac l'angolo eguale al BaC della figura prima, e il suo segmento coll'arco $a7f$ darà, ed esattissimamente, lo stesso punto 7 di contatto: per trovare l' y , si farà altrettanto nel quadrante dye , ovvero si congiungerà il punto 7 al c , prolungherassi questa retta sino ad incontrare l'arco dye , ed il loro segmento sarà il punto y medesimo.

Nella ipotesi ordinaria rispetto alla direzione della luce, i due punti 7 , y sono quelli di mezzo degl'istessi quadranti $f7a$, dye , perchè l'angolo BaC anzidetto è semiretto, parte prima, paragrafo settimo.

OSSERVAZIONE 5. Siccome tanto la traccia che esprime la semiperiferia descritta sul diametro CH , quanto le tracce indicanti le rette tirate da C ai punti M , R , -- hanno naturalmente una larghezza; così i loro segmenti n , h , -- risulteranno estesi, particolarmente quelli delle rette che fanno colla CQ angoli minori di un semiretto, come lo mostra visibilmente il segmento h ; e però riesce malagevole il determinare esattamente coi segmenti medesimi la vera lunghezza di quelle corde Cn , Ch , -- che fanno colla retta CQ angoli minori di un semiretto: meglio sarà pertanto trovare le lunghezze di queste ultime corde col metodo seguente:

Si prenda CS eguale alla CH , e si descriva sopra di essa, come diametro, l'arco circolare SgU , e nella corda Sg si avrà, ed agevolmente, la vera lunghezza della corda Ch , che fa d'uopo portare secondo la CV da C verso H , onde ecc.

Imperciocchè i due archi Ch , Sg appartenenti a circoli eguali, esprimendo amendue il doppio della misura del medesimo angolo QCR , saranno fra loro eguali; e però tali saranno pure le corde Ch , Sg sottese da essi.

ALTRO METODO PER DESCRIVERE L'ORTOGRAFIA DEL CONTO RNO DELL'OMBRA PROPRIA DEL TORO,
QUANDO I RAGGI DI LUCE ABBIANO LA DIREZIONE ORDINARIA,
SENZA BISOGNO DI VERUNA ICNOGRAFIA.

Sia --*qzep*-- l'ortografia del toro (fig. 17), e *c* un punto di essa analogo a quello della fig. 15.

Si tiri la verticale *pcq* e l'orizzontale *rc*, si costruisca in *a* centro dell'arco *ze* l'angolo *cad* semiretto: ciò fatto, conducansi le *reb*, *ehf* parallele alle *pq*, *rc*, si congiunga *bhc*, costituisca l'angolo *lhf* semiretto, e descrivansi gli archetti circolari *i*, *l* col centro *f* e col raggio eguale alla *fe*, e dai segmenti *l*, *i* tirinsi le *ln*, *im* verticali, che i due punti *m*, *n* saranno dell'ortografia dimandata.

Nella figura diciottesima, la quale esprime visibilmente una parte della sedicesima, si conduca la retta *M3* parallela alla *CV*, la *T3* perpendicolare alla *CT*, ed estendasi *MI* sino in 4 ad incontrare la *AC* prolungata, se occorre; e si avrà

$$M3:MT=CM:Cl,$$

per la simiglianza dei triangoli *M3T*, *MCl*, ed

$$MN:M3=Cl:C4,$$

essendo le rette *M3*, *C4* eguali alle diagonali dei quadrati aventi i lati eguali alle *MN*, *Cl* in virtù della particolare direzione dei raggi di luce; e però sarà

$$M3 \cdot MN:MT \cdot M3=CM \cdot Cl:Cl \cdot C4, \text{ ovvero}$$

$$NM:MT=CM:C4, \text{ oppure } CM:C4=MO:MN$$

per essere evidentemente $NM:MT=MO:MN$; vale a dire i punti del contorno dell'ombra, i quali sono naturalmente fra quelli della superficie del toro, debbono avere in questa ipotesi particolare l'esclusiva proprietà che esprime la proporzione geometrica

$$CM:C4=MO:MN.$$

Ma se i triangoli *lch*, *hci* (fig. 17) col rotare attorno alla retta *ef*, il primo innanzi e l'altro indietro, si dispongono orizzontali, i punti *l* ed *i* passano nella periferia del cerchio orizzontale che ha il centro in *f*, e per raggio *fe*, e però nella superficie del toro; e se nella proporzione

$$cr:fh=br:cf,$$

che danno i triangoli simili *cbr*, *chf*, si sostituiscono in vece delle rette *cr*, *br*, *cf* le loro eguali *fl*=*fi*, *ar*, *er*, ottiensi la seguente

$$fl:fh=ar:er,$$

la quale esprime che i punti *l* ed *i* hanno la suddetta proprietà esclusiva a quelli del contorno dell'ombra propria del toro; adunque i due punti *m* ed *n*, i quali sono per la costruzione le ortografie degli *l* ed *i*, apparterranno all'ortografia dimandata; come ecc.

PROPOSIZIONE VIII.

Trovare l'icnografia e l'ortografia del contorno dell'ombra propria di una superficie di rotazione avente l'asse verticale, conoscendosi la posizione di quest'asse, ed una generatrice della medesima superficie.

Sia *AB* (fig. 19) l'ortografia, e *G* l'icnografia dell'asse di rotazione della superficie, e *BC* sia la curva piana generatrice della medesima superficie.

Si conduca la retta aCD parallela alla I , si faccia l'angolo EDC eguale al Σ , descrivasi la figura $abnc$ eguale perfettamente alla ABC , e la periferia circolare GHD sulla CD come diametro: posto ciò, si tiri una retta GHI , si prenda $GL = CH$, uniscasi EL , si conduca a questa la parallela nt che sia tangente la curva bnc , si abbassi dal punto di contatto la retta np perpendicolare alla aG , che preso GI eguale alla ap , e condotta IQO perpendicolare alla LM asse, e fatto la QO eguale alla np , si avrà in I l'icnografia, ed in O l'ortografia di un punto del contorno dell'ombra in quistione.

Passi il piano verticale per la GI , e la sezione della superficie sarà evidentemente una linea eguale perfettamente alla BC , e dall'incontro di questa curva e del contorno dell'ombra propria della superficie s'immagini condotta una parallela ai raggi di luce, e poscia proiettata ortogonalmente sul medesimo piano verticale, e questa proiezione sarà tangente la sezione stessa, e farà colla orizzontale GI un angolo eguale all' ELG , e però all' nta . Quindi I ed O saranno l'icnografia e l'ortografia del suo punto di contatto sulla superficie di rotazione, cioè di un punto del contorno dell'ombra propria della stessa superficie; come volevasi dimostrare.

OSSERVAZIONE. Se l'asse della superficie fosse perpendicolare al piano ortografico, si direbbe dell'ortografia e dell'icnografia del contorno dell'ombra propria della superficie di rotazione ciò che si è qui sopra detto dell'icnografia ed ortografia.

DE' CONTORNI

DELLE OMBRE PROPRIE DELLE SUPERFICIE SPIRALI.

Una linea piana muovasi in modo che un punto individuato del suo piano percorra un'elice, ed il piano di essa, senza rotare intorno a questo punto, faccia costantemente il medesimo angolo coll'asse dell'elice medesima: la superficie così generata da questa linea mobile si chiamerà *superficie spirale*, la linea stessa mobile *generatrice*, e l'elice *direttrice* di essa superficie.

La superficie di una colonna spirale si può supporre generata dalla periferia di un cerchio che si muove, mantenendosi orizzontale, e percorrendo col suo centro una data linea, purchè il raggio del medesimo cerchio generatore varii, come variano i raggi delle sezioni orizzontali della medesima colonna. Nelle ordinarie colonne spirali la linea che percorre il centro del cerchio generatore, o sia la direttrice, è un'elice avente le tangenti tutte egualmente inclinate al piano icnografico, e situata in una superficie cilindrica ordinaria avente l'asse verticale; e però ammesso costante il cerchio generatore, la superficie di esse sarà spirale.

PROPOSIZIONE IX.

Trovare l'ortografia del contorno dell'ombra propria di una colonna spirale ordinaria e non rastremata, conoscendosi il raggio della periferia generatrice, e l'ortografia e l'icnografia dell'elice direttrice o sia percorsa dal centro della stessa periferia.

L'elice percorsa dal centro della periferia generatrice abbia per ortografia la curva EFG (fig. 20), e per icnografia la circonferenza circolare ABC che ha il centro in D .

Dal punto m , dove la retta Dm perpendicolare all'asse ML sega l'ortografia EFG , si tiri mn tangente a questa, si seghi ce eguale alla AD , e tirinsi le ed , dN , NH , DH parallele rispettivamente alle mn , O , Dm ed I : fatto ciò, uniscasi H ad un punto qualunque A della periferia ABC , si seghi l'arco AB eguale ad un quarto di essa, conducasi BP perpendicolare alla HA ed eguale al raggio della periferia generatrice, le BF , PI perpendicolari amendue alla LM , e finalmente FI parallela alla stessa LM , ed avrassi in I un punto dell'ortografia dimandata.

Si unisca AD , descrivasi l'arco circolare RPS col centro B , e si tiri TPX parallela alla AH o sia tangente l'arco stesso RPS in P .

Per essere t il punto della periferia ABC più vicino alla ML , la retta tangente l'elice in $t-m$ sarà parallela al piano ortografico, e però anche alla mn ortografia di essa; quindi gli angoli fatti dalle tangenti l'elice $ABC-EFG$ col piano icnografico, i quali sono tutti eguali fra loro pel dato, eguaglieranno l'angolo mnL , ovvero deL determinato sopra. Così conducendo dal punto $D-d$ delle rette parallele alle tangenti l'elice medesima, queste forneranno col piano icnografico degli angoli eguali allo stesso mnL , e costituiranno conseguentemente i lati della superficie del cono ordinario avente per base il cerchio ABC , ed il vertice in $D-d$, essendo $ce=AD$, ed ed parallela alla mn .

Similmente per la stessa generazione della superficie della colonna, supposto che la periferia generatrice non ruoti orizzontalmente attorno al suo centro, ogni punto di essa descriverà un'elice eguale perfettamente a quella descritta dal suo centro; e però la superficie in quistione si può considerare costituita d'infinite elici eguali alla $ABC-EFG$.

Ora si seghi la superficie della colonna col piano orizzontale che passa per IF , ed ai punti di questa intersecazione, la quale sarà la periferia orizzontale che ha il centro in $B-F$, ed il raggio eguale alla BP , s'immaginino condotte le tangenti l'elici anzidette: queste tangenti essendo fra loro parallele per l'eguaglianza perfetta delle elici, costituiranno la superficie cilindrica ordinaria tangente la superficie della colonna nella medesima intersecazione; quindi la periferia orizzontale che ha il centro in $F-B$ ed il raggio eguale alla BP , sarà segata in uno stessissimo punto dai contorni analoghi delle ombre proprie di esse superficie.

Essendo AD parallela alla retta tangente in B la circonferenza ABC , e le dN , HN , DH parallele ordinatamente alle O , Dd , I , sarà AH la traccia icnografica del piano delle rette che passano per $D-d$, l'una parallela ai raggi di luce, e l'altra alla tangente in $B-F$ dell'elice $EFG-ABC$; e però il punto P di contatto fra la circonferenza RS , che ha il centro in B ed il raggio BP , rappresenterà, per la proposizione prima, l'icnografia del segmento fra la periferia orizzontale avente il centro in $F-B$ ed il raggio eguale alla BP , e l'estremo dell'ombra propria della superficie cilindrica suddetta, e

conseguentemente anche l'icnografia del segmento fra la medesima periferia orizzontale ed il contorno dell'ombra propria della colonna; e pertanto per essere le BF , PI perpendicolari, e la FI parallela alla ML , sarà I , come ho asserito, un punto dell'ortografia dimandata.

Così, prolungando la BP verso c quanto è la lunghezza di essa, nell'altro termine di questo prolungamento si avrà un punto dell'icnografia dell'altro estremo dell'ombra in quistione; e facendo per esso ciò che si è fatto pel P , si avrà la corrispondente ortografia.

OSSERVAZIONE 1. Per avere l'angolo mnL da cui dipende la regola esposta, in vece di condurre la tangente in m alla EFG , si potrà segare cn eguale alla parte della periferia ABC intercetta fra il punto t ed il primo termine dell'elice; giacchè, congiunto il punto n così determinato coll' m , avrassi la stessa tangente mn suddetta per la notissima proprietà delle elici ordinarie.

Preferirassi con vantaggio quest'ultima regola alla superiormente esposta tutte le volte che la porzione della periferia ABC , a cui si dovrà fare eguale la retta cn , sarà una parte aliquota, nota, della stessa periferia.

OSSERVAZIONE 2. Se i raggi di luce fossero orizzontali, la dN sarebbe parallela alla ML , e però AH alla DH . Adunque segato AB eguale alla quarta parte della periferia ABC , tirata AH parallela alla I , e poi le BP , BF , FI , PI come superiormente, si avranno immediatamente i punti P , I . In questo medesimo caso se i raggi di luce, oltre di essere orizzontali, saranno anche perpendicolari al piano ortografico, l'ortografia del contorno dell'ombra si confonderà evidentemente coll'ortografia della stessa colonna; quindi colla regola qui enunciata si potrà, occorrendo, disegnare esattamente anche l'ortografia della colonna medesima.

PROPOSIZIONE X.

Data l'ortografia e l'icnografia della linea descritta dal centro della periferia generatrice della superficie di una colonna spirale, e la legge che regola la variazione dei raggi della medesima periferia, mentre che genera la superficie stessa, trovare l'ortografia del contorno dell'ombra propria della colonna medesima.

Sia ABC l'ortografia (fig. 21), ed abc l'icnografia della linea descritta dal centro della periferia generatrice, e le ordinate orizzontali della linea gf riferita alla retta verticale DF indichino i raggi delle sezioni della colonna situate nei medesimi piani orizzontali.

Si conduca BgE orizzontale, la Bb perpendicolare alla LM asse solito, la gF tangente in g alla linea gf , e le b_1 , bl , la prima tangente, e la seconda normale in b alla linea abc ; seghisi bl eguale ad EF , e costruiscasi l'angolo lbm eguale a quello che fa col piano icnografico la tangente in $B-b$ alla curva $ABC-abc$, e poi tirisi lm parallela alla b_1 , e la m_1 alla bl : fatto ciò, tirisi 143 perpendicolare alla LM , facciasi 43 eguale alla m_1 ,

conducansi le $1k$, 32 parallele rispettivamente alle I , O , e la $2k$ alla bB ; finalmente descrivasi l'archetto β col centro b ed il raggio eguale alla gE , e l' α col centro n punto di mezzo della bk e col raggio eguale alla bn , si conduca pel punto O comune a questi due archetti la OP perpendicolare alla ML , e si avrà nel segmento P un punto dell'ortografia richiesta.

L'estremo dell'ombra propria del cono, che ha per base il cerchio $b\beta$ ed il vertice in $1-3$, è segato dalla periferia della sua base in O per la proposizione seconda; ed esso cono è eguale perfettamente a quello avente per base la sezione della colonna che ha il centro in $B-b$, e la cui superficie tocca tangenzialmente in questa sezione la colonna stessa, anzi questo è quello alzato verticalmente; adunque il punto P , ecc. ecc.

OSSERVAZIONE. Quantunque la superficie di cui si parla in quest'ultima proposizione ed anche nella seguente non appartenga alla famiglia delle superficie spirali sopra definite, non ostante ho creduto bene di considerarle in questo luogo per la grande analogia che ha con quella considerata nella proposizione precedente, la quale è evidentemente un caso particolare di questa medesima.

PROPOSIZIONE XI.

Trovare l'ortografia e l'icnografia del contorno dell'ombra propria della superficie di una colonna spirale comunque posta nello spazio, essendo data l'ortografia e l'icnografia di una retta a cui si mantiene perpendicolare costantemente il cerchio generatore, le proiezioni ortogonali della direttrice fatte sopra due piani, l'uno parallelo e l'altro perpendicolare, in un dato punto a questa medesima retta, più essendo nota la linea le cui ordinate successive eguagliano i raggi delle successive sezioni circolari della colonna stessa.

Sia aP l'ortografia (fig. 22), e BA l'icnografia della retta data, a cui sono perpendicolari i piani dei circoli generatori, ed $A-a$ il suo punto per cui passa il piano ad essa perpendicolare, e nel quale è disegnata una delle ortogonali proiezioni conosciute della direttrice, o la linea che percorre il centro del cerchio generatore.

Si faccia AC perpendicolare alla AB , Cc alla ML , ac parallela alla medesima ML ; indi tirinsi le MP , MBE perpendicolari rispettivamente alle Pa , AB , e saranno queste le tracce di quel piano che passa pel punto $A-a$, ed è perpendicolare alla retta $AB-aP$.

Così facciasi FG eguale alla AB , GH perpendicolare alla FC ed eguale alla Cc , ed uniscasi FH , e sarà HFG l'angolo diedro compreso dal piano icnografico e da quello avente le tracce MP , MB . Si tiri AD parallela alla I , ed ad alle O , e le DE , Dd rispettivamente perpendicolari alle ME , ML ; e prendasi FI eguale alla DE , e poi conducasi IK perpendicolare alla stessa FI ed eguale alla dn , indi KP perpendicolare alla FH .

Supposto N il punto dove ME è segata dalla sezione comune dei due piani in cui vi sono le proiezioni ortogonali conosciute della direttrice, ed $n'me$ l'angolo compreso da questa comune sezione e dalla stessa EM ;

facendo bm , em eguali rispettivamente alle BN , EN , e le $A'b$, $D'e$ perpendicolari alla em ed eguali alle FH , FP , otterransi i punti A' , D' , i quali rappresenteranno la posizione che avranno in questo medesimo piano il punto $A-a$ ed il piede della perpendicolare tirata dal $D-d$ al piano MPE ; e tirate $A'a'$, $D'n'$ perpendicolari alla mn' , e fatta $n'd'$ eguale alla PK , avransi nei punti a' , d' le proiezioni ortogonali dei punti stessi $A-a$, $D-d$ fatte nel piano dato parallelo alla $BA-aP$.

Quindi le rette AD' , $a'd'$ rappresenteranno le proiezioni ortogonali della $AD-ad$ parallela ai raggi di luce, fatte sui medesimi due piani in cui vi sono disegnate per ipotesi le proiezioni della direttrice della superficie della colonna.

Ora che si conoscono nei piani anzidetti le proiezioni AD' , $a'd'$ di una parallela ai raggi di luce, le proiezioni della direttrice della colonna, non che la linea, le cui ordinate successive eguagliano i raggi delle successive sezioni circolari o parallele al piano PME , si troveranno le proiezioni ortogonali $S'T'$, $s't'$ del contorno dell'ombra propria di cui si parla, fatte su questi medesimi due piani, e precisamente come si trovarono le ortografie ed icnografie degli estremi analoghi nelle proposizioni precedenti. Fatto ciò, si tirerà $s'S'$ perpendicolare alla mn' , $S'x$ alla mx ; faransi NX , Fs eguali rispettivamente alle mx , xS' ; condurrassi sv perpendicolare alla FH ed eguale alla $s'u'$, la vz perpendicolare alla ML , indi SX eguale alla Fz , ed Ss perpendicolare alla ML , e si segherà su eguale alla vz , che i punti S , s apparterranno, il primo all'icnografia ST , ed il secondo all'ortografia st del contorno dell'ombra propria della colonna spirale comunque posta nello spazio.

S'immagini il quadrilatero $IKPF$ posto verticalmente sulla retta DE in modo che il punto I cada in D , e l' F nell' E ; in questa situazione il punto K cadrà nel $D-d$, ed il P nel piede della perpendicolare tirata dallo stesso punto $D-d$ al piano PME ; e però KP sarà eguale alla perpendicolare tirata dal punto $D-d$ al piano PME , e la PF alla distanza che ha il piede di questa perpendicolare dal punto E . Similmente coll'immaginarsi le figure $zvsF$, GHF collocate verticalmente nelle rette SX , AB ed in maniera che i punti z , G cadano negli S , A , si comprenderà che H , r confonderansi cogli $A-a$, $S-s$, e conseguentemente sarà vs eguale alla perpendicolare tirata da $S-s$ al piano PME , la sF alla distanza fra questo piede al punto X , come FH eguaglierà la perpendicolare condotta dal punto $A-a$ alla stessa NE . Quindi essendo mb , mx , me , bA' , xS' , eD' eguali ordinatamente alle NB , NX , NE , FH , Fs , FP , e le ultime tre perpendicolari alla retta me , i punti A' , D' ed S' saranno disposti nel piano ema' , come sono nel PME il punto A ed i piedi delle rette tirate dagli $S-s$, $D-d$ perpendicolarmente al piano stesso PME : così, per essere $A'a'$, $S's'$, $D'd'$ perpendicolari alla mn' , e le $u's'$, $n'd'$ eguali rispettivamente alle sv , PK , i punti a' , s' , d' saranno disposti nel piano $mn'd'$, come le proiezioni ortogonali degli $A-a$, $S-s$, $D-d$ fatte nel piano parallelo alla $AB-aP$ e che passa per la retta, la quale incontra ME in N , e sega il piano PME lungo la retta facente colla stessa MN un angolo eguale all' $n'me$, trovansi effettivamente in questo medesimo piano.

Pertanto le rette $A'D'$, $a'd'$ rappresentano le proiezioni ortogonali della $AD - ad$ fatte sui piani in cui vi sono le proiezioni conosciute della direttrice, e reciprocamente le linee ST , st costituite dai punti determinati come gli S , s esprimeranno l'icnografia e l'ortografia della linea avente le $S'T'$, $s't'$ per proiezioni ortogonali fatte sui detti piani, e conseguentemente le medesime linee ST , st saranno l'ortografia e l'icnografia dimandate.

OSSERVAZIONE. Molte volte in vece di conoscere la posizione del punto N e l'angolo $n'mx$, come ho supposto tacitamente nella costruzione esposta, si conosceranno due punti del piano PME , pe' quali passerà quello parallelo alla retta $AB - aP$: in questi casi si farà per ciascuno di questi punti ciò che si è fatto pel punto $A - a$, ed avransi nel piano $n'me$ due punti analoghi all' A' , i quali, congiunti con una retta, daranno la stessa retta mn' sezione dei due piani nei quali trovansi le proiezioni ortogonali conosciute della direttrice della superficie della colonna: generalmente uno di questi punti è lo stesso punto $A - a$.

Così, se la direttrice della superficie della colonna spirale fosse data per via della sua ortografia ed icnografia, converrebbe primieramente trovare le sue proiezioni ortogonali sui piani l'uno perpendicolare e l'altro parallelo alla $BA - aP$, facendo per ciascun punto di essa ciò che si è praticato pel punto $D - d$, onde avere i due D' , d' ; giacchè nella serie dei punti analoghi al D' avrebbesi la proiezione ortogonale di essa direttrice nel piano perpendicolare alla retta $AB - aP$, ed in quella dei simili al d' l'altra proiezione ortogonale della medesima direttrice.

PROPOSIZIONE XII.

Trovare l'ortografia e l'icnografia del contorno dell'ombra propria della superficie spirale generata dalla periferia di un cerchio, il cui centro percorre un'elice ordinaria avente l'asse verticale, ed il piano del quale passa costantemente per quest'asse medesimo.

La periferia generatrice della superficie eguagli la $G\alpha O$ (fig. 23) che ha il centro in F , e l'elice percorsa dal centro di essa, nel generare la superficie medesima o sia la direttrice, abbia per icnografia la circonferenza CBV avente il centro in A , per ortografia la curva cbv , e per asse la verticale $A - Aa$; ed ML sia la solita linea comune ai piani ortografico ed icnografico.

Si faccia hH perpendicolare alla μFQ , la μF eguale alla AB , e la EH quarta proporzionale geometrica dopo il passo dell'elice $CBV - cbv$, la circonferenza del raggio μE , e la retta EN ; si tiri NP tangente in N all'arco $G\alpha$, si costruisca l'angolo NQE eguale al Σ , uniscasi la HPR , e si descrivano gli archetti R , S col centro E ed il raggio EQ : fatto ciò, si costruisca l'angolo IAN eguale all' REQ , la retta BX eguale alla FE , le Bb , Xx parallele alla Aa , la mb orizzontale, e la mx eguale alla EN , e sarà $X - x$ un punto del contorno dell'ombra propria di cui si parla, cioè X un punto della sua icnografia, ed x dell'ortografia, linee entrambe richieste.

La superficie in quistione si consideri composta d'infinite elici ordinarie aventi l'asse comune $A - Aa$, e queste elici avranno evidentemente i passi eguali; e s'immaginino formati i due triangoli rettangoli, i cui cateti siano pel primo le rette EN , EH , e per l'altro la circonferenza del raggio μE ed il passo comune delle elici anzidette, e saranno essi

triangoli equiangoli, per la proporzione geometrica superiormente costituita. Ma l'angolo del secondo di questi triangoli opposto a quel lato che eguaglia il passo delle elici è eguale all'inclinazione che hanno al piano icnografico le tangenti di quell'elice la cui distanza dall'asse $A-Aa$ è μE ; adunque a questa medesima inclinazione sarà pure eguale l'angolo del primo dei medesimi triangoli opposto al lato EN , e che nominerassi EHN .

Ora le linee GN , EN , NP , NQ col rotare attorno alla μQ passino nel piano innalzato verticalmente sopra questa medesima retta, e sia unita la nuova posizione del punto N ai due H , R , ed avransi due rette facenti colle EH , ER , loro icnografie, angoli rispettivamente eguali agli EHN , $NQE = \Sigma$; indi si supponga la figura così costituita dalle linee μQ , $GN\alpha$, NE , ER , trasportata in modo che le FE , EN coincidano colle loro eguali $BX - bm$, $X - mx$; e le rette congiungenti il punto N , ora $X - x$, alle nuove posizioni degli H , R risulteranno tangenti in $X - x$; la prima alla circonferenza generatrice che ha il centro in $B - b$, e colla quale si confonde attualmente la GNO , e l'altra tangente l'elice a cui appartiene lo stesso punto $X - x$; e però il piano di esse rette sarà esso pure tangente la superficie medesima in $X - x$, e conseguentemente la HR nella sua nuova posizione esprimerà la comune sezione del piano orizzontale condotto per la bm , e del piano tangente la superficie in quistione nello stesso punto $X - x$.

Ma la retta che unisce il punto $X - x$ alla nuova posizione della R essendo nel piano tangente anzidetto, è essa medesima tangente in $X - x$ la superficie; e per essere l'angolo che essa fa colla novella posizione della ER eguale alla $NQE = \Sigma$, e l' IAx eguale all' REQ , risulta essa retta anche parallela ai raggi di luce; adunque il punto $X - x$, sopra trovato, sarà un punto di contatto fra la superficie spirale ed una retta parallela ai raggi di luce, e quindi un punto del contorno dell'ombra propria della stessa superficie; ciò che ecc.

COROLLARIO 1. Se il punto N cadrà in α , la retta ER diverrà perpendicolare alla μQ ; e se il medesimo punto N coinciderà con quello di contatto fra l'arco $GN\alpha$ e la sua tangente che fa colla μQ l'angolo eguale al Σ , la ER si confonderà colla μQ , cioè l'angolo REQ sarà retto nel primo caso, e zero nel secondo.

COROLLARIO 2. Se i raggi di luce fossero paralleli all'orizzonte, la NQ lo sarebbe alla μQ , e però anche ER parallela alla HR ; quindi l'angolo REQ eguaglierebbe in tal caso lo stesso EPH : e se oltre di essere i raggi orizzontali, la IA sarà perpendicolare alla ML , l'ortografia del contorno dell'ombra si confonderà colla stessa ortografia della superficie; e però, occorrendo, si potrà disegnare anche la stessa ortografia della superficie spirale colla medesima regola esposta per trovare l'ortografia del contorno della sua ombra propria in questo caso particolare.

OSSERVAZIONE 1. Onde avere le altre rette analoghe alla HE , in vece di fare per ciascuna di esse ciò che si è fatto per ottenere HE , cioè d'istituire tante proporzioni geometriche quante sono le medesime rette, quando sarà determinata una di esse, per esempio EH , si potrà procedere nel modo seguente:

Uniscasi μH , e si tiri nf parallela alla μQ , e la ξft perpendicolare; indi seghisi ξt eguale alla FO , si congiunga μtT , ed fT sarà per la FO ciò che HE è per Lm od EN , cioè la quarta proporzionale geometrica dopo il passo delle elici, la circonferenza del raggio μF e la FO stessa.

Si nomini π il rapporto della circonferenza al diametro, e p il comun passo delle elici, e si avranno le tre proporzioni

$$p : 2\pi \cdot \mu E = En : HE,$$

$$\mu E : HE = \mu \xi : En,$$

$$\mu \xi : \mu F = FO : FT;$$

la prima per la proprietà della retta HE , e le altre due per la costruzione.

Moltiplicando i termini corrispondenti di queste proporzioni, se ne ottiene una quarta, che si riduce alla seguente

$$p : 2\pi \cdot \mu F = FO : FT,$$

la quale esprime essere la retta FT , anzi determinata, quarta proporzionale geometrica dopo il comun passo delle elici, la circonferenza del raggio μF , e la FO ; ciò che ecc.

OSSERVAZIONE 2. Fatta ES anch'essa eguale alla EQ , l'angolo IAV al risultante QES , e segata UV eguale alla FE od alla BX ; indi condotte le Vv , Uu parallele alla Aa , e l'orizzontale vg , e tagliata gu eguale alla mx o sia alla EN , in $U-u$ si avrà un punto del contorno dell'ombra in quistione.

Similmente, segata $Eh = HE$, unita hPr , fatte Es , Er ambe eguali alla EQ ; indi costruito l'angolo $I'AZ$ eguale all' rEQ , ed $I'AJ$ alla sEQ , e segate CZ e KJ eguali alla FE , e condotte le Cc , Zz , Kk , Jj parallele alla Aa , e le orizzontali cp , ky ; e segate finalmente pz , yi eguali alla En , saranno Z , J due punti dell'icnografia, e z , j i corrispondenti dell'ortografia in quistione: tutto si dimostra come si è fatto pel punto $X-x$.

Essendo gli angoli IAX , IAV eguali ai due $I'AZ$, $I'AJ$ ciascuno a ciascuno, e le rette AX , AU eguali alle AZ , AJ , la $D\Delta$ perpendicolare alla II' sarà un asse dell'icnografia qui descritta;

Quindi delineata la parte di essa che cade da una banda della $D\Delta$, agevolmente descriverassi anche l'altra, senza usare la regola dichiarata.

OSSERVAZIONE 3. La regola esposta per determinare l'ortografia e l'icnografia di un punto del contorno esteriore dell'ombra propria della superficie spirale si estende anche alla determinazione di un punto dell'altro estremo dell'ombra della medesima superficie. Anzi per essere ordinaria l'elice direttrice, l'ortografia intera del contorno dell'ombra propria della superficie stessa risulterà composta evidentemente di tante parti eguali perfettamente fra loro, quanti saranno i passi dell'elice medesima; e l'icnografia del medesimo contorno si ridurrà alla sola icnografia corrispondente ad un passo della direttrice stessa.

OSSERVAZIONE 4. Sostituendo alla circonferenza GNO una linea qualunque, ad F suo centro un punto individuato di questa nuova linea colla regola dichiarata sopra, si avrà l'ortografia e l'icnografia del contorno dell'ombra propria della superficie spirale generata dalla linea medesima, supposto che il detto suo punto individuato percorra l'elice $CBV - cbv$: in virtù di questa generalità la proposizione nona è riducibile ad un caso particolare della presente.

Se la nuova linea fosse quella costituita dalle rette linee xP , qP , le rette analoghe alle HR , hr passerebbero tutte pel medesimo punto P della μQ ; e se queste due rette linee xP , qP terminate saranno egualmente inclinate all'orizzonte, la superficie generata da esse sarà quella del *filetto* di una vite triangolare ordinaria, come la superficie spirale di cui si parla nella proposta proposizione è evidentemente quella dell'analogo filetto di una vite circolare.

DE' CONTORNI

DELLE OMBRE PROPRIE DELLE SUPERFICIE DEI CANALI.

La superficie generata da una linea che si muove conservando il suo piano perpendicolare alla linea descritta da un punto individuato di esso piano, e senza rotare intorno a questo medesimo punto, si chiama *superficie dei canali*. La parte superiore delle superficie delle volte dei canali sotterranei, delle scale a chiocciola e di varj membri degli archivolti sono superficie di questa famiglia.

PROPOSIZIONE XIII.

Trovare l'ortografia del contorno dell'ombra propria della superficie generata dalla periferia di un cerchio che si muove, mantenendosi perpendicolare alla linea descritta dal suo centro situata nel piano ortografico, conoscendosi la periferia generatrice e la linea descritta dal suo centro o sia la direttrice della superficie medesima.

Sia ABC (fig. 24) la linea che descrive il centro della periferia generatrice, ed $EDGF$ l'ortografia della superficie, e la periferia $hamc$ (fig. 25) rappresenti l'ortografia di una sfera che ha il raggio eguale a quello della periferia generatrice della superficie in quistione, ed il centro in b ;

Si descriva cpa ortografia del contorno dell'ombra propria della sfera, conducansi le rette BL , $B'L'$, -- normali alla curva ABC , e parallelammente ad esse i raggi vettori centrali bp , bp' , -- dell'ellisse apc , cioè bp parallelo alla BL , bp' alla $B'P'$, ecc.; e delle medesime normali seghinsi le parti BP , BP' , -- eguali rispettivamente ai raggi vettori paralleli ad esse, e si avranno i punti P , P' , -- appartenenti all'ortografia del contorno dell'ombra propria della superficie di cui si parla.

Suppongo la superficie in quistione segata da un piano perpendicolare a quello della ortografia, e condotto lungo la HL normale della curva ABC nel punto B ; la sezione sarà una periferia di cerchio del diametro HL , la quale intersecherà in due punti il contorno dell'ombra propria della superficie. Da uno di questi segmenti, dall' anteriore per esempio, sia condotta una parallela ai raggi di luce, e risulterà essa tangente la superficie; e però la sua proiezione retta sul piano della sezione toccherà tangenzialmente la sezione stessa nel segmento medesimo.

Ora questa sezione è la sua tangente, col rotare attorno alla HL insieme al piano segante in cui trovansi, si adattino a quello dell'ortografia; e siano in questa nuova posizione rappresentate, la periferia dalla HML , e la sua tangente dalla MT ; e dal punto M di contatto conducasi la MP perpendicolare alla HL , e sarà P l'ortografia del segmento suddetto.

Similmente, segata la sfera rappresentata dal cerchio $hamc$ con un piano perpendicolare all'ortografico e che passi pel diametro hl parallelo alla normale HL , la sezione

sarà un cerchio massimo, la cui periferia incontrerà in due punti l'estremo dell'ombra propria della sfera; e dall'anteriore di questi due segmenti conducendo una parallela ai raggi di luce, risulterà tangente la sfera; e per conseguenza la sua proiezione ortogonale sul piano del detto cerchio massimo sarà tangente a questo nello stesso segmento.

Questo cerchio massimo insieme alla sua tangente, rotando attorno al diametro hl , si adatti al piano $hamc$: in tale situazione il cerchio sarà rappresentato dalla stessa ortografia della sfera; e la sua tangente lo sia dalla retta mt tangente in m all'ortografia medesima.

Condotta la mp perpendicolare alla ht , sarà p l'ortografia del segmento anteriore, e però p un punto dell'ellisse apc esprimente l'ortografia dell'estremo dell'ombra propria della sfera, e che si delinearà colla regola esposta nella proposizione terza.

Siano tirati i raggi BM, bm ,

Le due tangenti MT, mt nelle loro posizioni primitive, cioè nei piani immaginati secondo le rette HL, hl , essendo le proiezioni ortogonali di due rette parallele ai raggi di luce, gli angoli MTB, mtb saranno fra loro eguali; e perciò i due triangoli rettangoli BMP, bmp , i quali hanno le ipotenuse eguali, e gli angoli BMP, bmp rispettivamente eguali ai medesimi MTB, mtb , saranno essi triangoli perfettamente eguali; e quindi BP eguaglierà bp , ed MP la mp .

Ma nello stesso modo che si è dimostrato $BP = bp$, si dimostrerebbe anche $B'P' = bp'$, --; adunque, essendosi segate $BP, B'P'$, -- eguali ordinatamente alle bp, bp' , --, i punti P, P' , -- apparterranno all'ortografia dimandata, come ho asserito.

COROLLARIO 1. Se la linea ABC (fig. 26) sarà circolare, descritta l'ellisse suddetta apc concentrica ad essa linea, i raggi vettori paralleli alle sue normali $BL, B'L'$, -- saranno le stesse loro parti bp, bp' , --, cioè sarà $bp = BP, bp' = B'P'$, --; e però anche

$$bp + Pb = BP + Pb, bp' + P'b = B'P' + P'b, \text{ -- o sia } Pp = Bb, P'p = B'b = Bb, \text{ --};$$

vale a dire tutte le rette $pP, p'P'$, -- saranno eguali alla Bb raggio della periferia ABb .

Quindi, prendendo le $pP, p'P'$, -- eguali alla Bb , avransi in un tratto i punti P, P' , -- dell'ortografia dimandata.

Nell'ipotesi ordinaria rispetto alla direzione dei raggi di luce, l'ellisse che bisognerà descrivere, avrà l'asse maggiore, che farà un angolo semiretto coll'orizzonte, e l'asse minore, il cui quadrato sarà un terzo del quadrato dell'altro: tutto questo si è veduto nella proposizione sovra citata.

COROLLARIO 2. Essendo $BP = bp, BL = bl$, sarà anche $PL = pl$; e però prendendo (fig. 24 e 25) $LP = lp, L'P' = l'p'$, --, si determineranno i punti P, P' , -- come sopra.

OSSERVAZIONE. Facendo $RB, R'B'$, -- eguali alle stesse $BP, B'P'$, --, si ottengono i punti R, R' , -- dell'ortografia dell'estremo invisibile dell'ombra in quistione.

COROLLARIO 3. La minima delle rette $BP, B'P'$, -- sarà la parallela all'asse minore dell'ellisse apc , o quella fra esse la quale farà con quest'asse il minimo angolo, e la massima sarà quella che avrà delle simili proprietà coll'asse maggiore della medesima ellisse.

Nel caso della linea ABC circolare (fig. 26) le minime delle rette anzidette, e però i punti dell'ortografia $1P_2$ più prossimi alla stessa ABC trovansi nella $B'b\beta$, di cui è parte l'asse minore dell'ellisse apc ; e le massime di esse rette, e conseguentemente i punti della stessa $1P_2$ più lontani dalla medesima direttrice ABC saranno 1, 2, dove l'asse maggiore ac esteso sufficientemente incontra la periferia circolare $1l_2$. In questo medesimo caso negl'istessi punti 1, 2 incomincia l'ortografia della parte invisibile dell'estremo dell'ombra che ha per ortografia -- $P'P$ --; e negli R, Q situati nella stessa

retta RQ degli 1, 2 principia a vedersi il contorno dell'ombra esteriore, la cui ortografia è rappresentata dalla linea -- $R35R$ --, che si determina anch'essa col fare $43 = bp$, $65 = bp'$, --, ovvero $37 = lp$, $58 = lp'$, --, o più semplicemente facendo le rette $p3$, $p'5$, -- tutte eguali alla stessa $b4$, siccome è egli evidente.

PROPOSIZIONE XIV.

Descrivere l'ortografia del contorno dell'ombra propria della superficie del canale che ha la direttrice nel piano ortografico, come nella proposizione antecedente, ma una linea qualunque per generatrice.

Sia AXB (fig. 27) la generatrice della superficie, e $CD'D$ la linea situata nel piano ortografico e descritta dal punto C del piano della AXB , ed a cui si mantiene costantemente perpendicolare il piano della stessa generatrice, senza punto rotare attorno la medesima, vale a dire la direttrice data; ed il punto d rappresenti (fig. 28) l'ortografia dell'asse della superficie di rotazione generata dalla linea AXB col rotare attorno la retta BC , posta col termine C in d e perpendicolare al piano ortografico.

Descritta l'ortografia ik del contorno dell'ombra propria della superficie di rotazione colla regola esposta nell'ottava proposizione per delineare l'icnografia di queste superficie, condotte le normali DG , $D'G'$, -- alla CE , e ad esse le parallele dp , dp' , --, prese le DP , $D'P'$, -- eguali rispettivamente ai raggi vettori dp , dp' , --, i punti P , P' , -- apparterranno alla richiesta ortografia.

Si facciano alle superficie due sezioni con piani perpendicolari all'ortografico, e condotti l'uno lungo la DT normale della CDE , e l'altro per td parallela alla stessa DT , e le due sezioni saranno evidentemente due linee perfettamente eguali alla generatrice AXB , e però anche fra loro; e dai punti ove queste linee segano gli estremi delle ombre proprie di queste superficie siano condotte due parallele ai raggi di luce, e risulteranno queste tangenti alle medesime superficie, e conseguentemente le loro proiezioni ortogonali sopra i piani delle sezioni rispettive saranno tangenti le stesse sezioni.

Posto ciò, suppongo che le due sezioni e le loro tangenti col rotare insieme attorno alle rette DT , dt adattinsi al piano ortografico, e che siano rappresentate in queste nuove posizioni le sezioni dalle linee GNB' , gnb' , e le rispettive tangenti dalle rette TN , tn tangenti in N , n alle medesime linee GNB' , gnb' ; e che siano condotte le NP , np perpendicolari alle DG , dg ; i punti P , p apparterranno evidentemente alle ortografie dei contorni delle ombre proprie delle medesime superficie.

Essendo gli angoli NTD , ntd eguali, e le linee NG , ng eguali fra loro perfettamente, le due figure $DPGTNB'$, $dpgtnb'$ saranno esattamente sovrapponibili; e però eguali fra loro risulteranno tanto le ordinate NP , np , quanto le ascisse corrispondenti DP , dp prese dai punti D , d ; quindi ecc.

OSSERVAZIONE 1. Descritta l'icnografia zz dell'estremo dell'ombra propria della superficie di rotazione, proposizione ottava, e condotte le verticali PVZ , $P'V'Z'$, -- $p\varphi z$, $p'\varphi'z'$, --, e prolungate le prime di VZ , $V'Z'$, -- rispettivamente eguali alle φz , $\varphi'z'$, --, i punti X , Z , Z' , -- apparterranno all'icnografia del contorno dell'ombra propria della superficie in quistione.

Di fatto essendo pn eguale alla vz ed anche alla PN , sarà $vz = PN$; ma acciò il punto Z della PZ perpendicolare alla LM sia nell'icnografia dimandata, basta che VZ eguagli PN ; adunque per essere $VZ = vz$, $V'Z' = ecc.$

OSSERVAZIONE 2. La lunghezza della retta DP non varia, variando comunque la linea CD direttrice, purchè rimanga invariabile la AXB generatrice, e l'angolo che fa la DT normale col prolungamento della AC .

OSSERVAZIONE 3. Se la linea AXB generatrice fosse di second' ordine, facendo di second' ordine anche la superficie di rotazione considerata in questa proposizione, l'ortografia del contorno della sua ombra propria, la quale sarà una linea generalmente della specie della generatrice stessa, si potrà determinare anche colle regole che si danno, parlando di queste superficie.

OSSERVAZIONE 4. Ora dovrei esporre e dimostrare, pel caso che la linea CDE direttrice trovisi in un piano orizzontale, tutto ciò che ho dichiarato qui sopra, essendo la medesima linea nel piano dell'ortografia; ma siccome ciò mi obbligherebbe ad una ripetizione delle medesime cose dichiarate, così mi limiterò ad esporre la sola regola seguente per determinare l'icnografia e l'ortografia di un toro ordinario, nel caso che i raggi di luce abbiano la direzione che fissano generalmente i disegnatori, la quale è interessante per la sua semplicità.

ALE (tav. III, fig. 29) rappresenti l'ortografia del toro, ed $fe7$ (fig. 15) la sua ortografia; e la retta AE sia omologa alla AD della figura sedicesima.

Si facciano gli angoli dOc , cOh semiretti (fig. 25), si prendano le rette Od , Oh , eguali ciascuna alla AF raggio del semicerchio generatore del toro, e le Og , Os che il quadrato di ciascuna eguagli la terza parte di quello della stessa AF , corollario secondo della proposizione terza; indi si descrivano sulle rette dO , sO , e sulle Og , Oh come semiassi le due semiellissi eguali adc , fgh ; cioè se ne descriva uno di essi, e poscia ricopinsi opportunamente le sue parti nell'altra: fatto questo, si tirino le rette OG , OL , OV , --, prendansi le nC , bL , vV , -- eguali tutte alla OF , ed i punti G , L , V saranno dell'icnografia dimandata.

Per avere le ortografie corrispondenti conducansi le rette $1nr$, $b2p$, $vx3$, -- perpendicolari alla AE , si prendano le $v6$, $m1$, $x5$, -- nelle Cv , Lm , Vx , -- ed eguali alle $r1$, $2p$, xy , -- ordinate dell'altra ellisse fgh , che i punti v , m , x , -- apparterranno all'ortografia dimandata.

Così, se la generatrice faf (fig. 15) fosse un'ellisse avente per semiassi $a\lambda$, $f\lambda$ e la direzione dei raggi qualunque, si troverebbero le due ellissi esprimenti l'ortografia e l'icnografia di un'ellissoide di rotazione posta col centro in O , ed avente l'asse verticale eguale alla ff , e l'orizzontale al doppio della $a\lambda$; e poscia si procederebbe alla delineazione dell'ortografia ed icnografia del contorno dell'ombra propria della superficie in quistione, precisamente come si è fatto sopra: e se la linea percorsa dal centro dell'ellisse generatrice non fosse circolare, descritte le due ellissi anzidette, procederebbero alla determinazione delle proiezioni del contorno dell'ombra colla regola che risulta, combinando quest'ultima coll'esposta nel corollario secondo della proposizione precedente, e facilissimamente immaginabile.

OSSERVAZIONE PRIMA.

Tutto ciò che ho detto nella proposizione undecima per le superficie delle colonne spirali, si estenderà facilmente non solo a tutte le superficie spirali, ma anche a quella dell'ellissoide, dell'iperboloide a due foglie, della paraboloide ellittica, alle superficie di rotazione e de' canali aventi la direttrice piana, ponendo la retta $AB - aP$ nell'asse comune alla prima e seconda sezione per le prime tre, nell'asse di rotazione per le superficie di questo nome, e per quelle de' canali perpendicolare al piano della direttrice; e supponendo date in un piano perpendicolare a questa retta ed in uno parallelo alla medesima, ciò che si è ammesso conosciuto nell'ortografico ed icnografico nelle proposizioni in cui ho parlato del contorno delle ombre proprie di queste medesime superficie.

OSSERVAZIONE SECONDA.

Sebbene colle regole esposte si possa determinare il contorno dell'ombra propria di una qualunque delle ordinarie superficie semplici che s'incontrano nelle belle arti, nulladimeno, perchè meno rimanga a desiderarsi rispetto alle ombre proprie, esporrò la soluzione analitica generale della proposizione enunciata al principio di questa parte, cioè una regola generalissima per determinare il contorno dell'ombra propria di qualsivoglia superficie, qualunque sia la direzione dei raggi di luce, colla quale si potranno scoprire agevolmente tutte le proprietà del contorno medesimo.

Siano x, y, z le coordinate rettangole di un punto qualunque della superficie del corpo che impedisce il passaggio alla luce, ed $F(x, y, z) = 0$ sia l'equazione di essa; ed $x' = az', y' = bz'$ siano le equazioni della parallela ai raggi di luce che passa per l'origine delle coordinate, supposto rappresentate dalle x', y', z' le coordinate rettangole di un punto qualunque di essa retta, e dalle a, b i soliti parametri.

Così p, q ed r esprimano le tre analoghe coordinate di un punto qualunque del piano tangente la superficie data nel punto a cui corrispondono le coordinate x, y, z , e sarà

$$r - z = (p - x) \left(\frac{dz}{dx} \right) + (q - y) \left(\frac{dz}{dy} \right)$$

l'equazione del piano stesso, e però

$$r' = p' \left(\frac{dz}{dx} \right) + q' \left(\frac{dz}{dy} \right)$$

quella del suo parallelo e che passa per l'origine delle coordinate: ammesso p', q', r' le coordinate di un punto qualunque di questo medesimo piano.

Ora egli è una proprietà caratteristica dei punti del contorno dell'ombra propria che i piani tangenti in questi punti alla data superficie s'iano paralleli ai raggi di luce; e però la retta espressa dalle equazioni $x' = az', y' = bz'$ sarà nel piano dato dalla

$$r' = p' \left(\frac{dz}{dx} \right) + q' \left(\frac{dz}{dy} \right);$$

o sia avranno luogo simultaneamente le tre equazioni seguenti:

$$p' = ar', \quad q' = br',$$

$$r' = p' \left(\frac{dz}{dx} \right) + q' \left(\frac{dz}{dy} \right).$$

Eliminando da queste tre equazioni le quantità $\frac{p'}{r'}$, $\frac{q'}{r'}$, si ha l'equazione

$$1 = a \left(\frac{dz}{dx} \right) + b \left(\frac{dz}{dy} \right),$$

la quale, col porvi in vece di $\left(\frac{dz}{dx} \right)$, $\left(\frac{dz}{dy} \right)$, i loro valori $-\left(\frac{dF}{dx} \right) : \left(\frac{dF}{dz} \right)$, $-\left(\frac{dF}{dy} \right) : \left(\frac{dF}{dz} \right)$ dedotti dall'equazione $F(x, y, z) = 0$, si riduce alla seguente

$$\left(\frac{dF}{dz} \right) + a \left(\frac{dF}{dx} \right) + b \left(\frac{dF}{dy} \right) = 0;$$

equazione che esprime una proprietà comune alle singole coordinate del contorno dell'ombra in quistione.

Ma il contorno dell'ombra propria del corpo che impedisce il passaggio alla luce si deve trovare anche nella superficie del corpo stesso; quindi il contorno medesimo sarà la linea che ha per equazioni

$$\left(\frac{dF}{dz} \right) + a \left(\frac{dF}{dx} \right) + b \left(\frac{dF}{dy} \right) = 0, \quad F(x, y, z) = 0.$$

COROLLARIO. Supposto il piano delle ordinate x, y orizzontale, e quello delle x, z parallelo all'ortografico, si avranno le equazioni dell'ortografia, dell'icnografia e del profilo del contorno dell'ombra, eliminando separatamente le quantità y, z, x dalle due equazioni qui esposte del contorno stesso.

ESEMPIO. La superficie che impedisce il passaggio alla luce sia la sferica, che ha il raggio eguale ad r , il centro nell'origine delle coordinate, cioè sia la sfera avente per equazione $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, e sarà

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2, \quad \text{e} \quad \left(\frac{dF}{dx} \right) = 2x, \quad \left(\frac{dF}{dy} \right) = 2y, \quad \left(\frac{dF}{dz} \right) = 2z;$$

e però le equazioni del contorno dell'ombra propria di questa superficie saranno

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \quad z + ax + by = 0.$$

La seconda di queste equazioni significa che il contorno trovasi in un piano che passa pel centro della sfera, ovvero che è la periferia di un cerchio massimo di essa, come risulta anche dal *lemma terzo*.

Eliminando separatamente y, z, x dalle due equazioni qui trovate, si ottengono le

$$(1 + b^2)z^2 + 2abxz + (1 + b^2)x^2 - b^2r^2 = 0,$$

$$(1 + b^2)y^2 + 2abxy + (1 + a^2)x^2 - r^2 = 0,$$

$$(1 + a^2)z^2 + 2abyz + (1 + a^2)y^2 - a^2r^2 = 0,$$

le quali rappresentano ordinatamente l'ortografia, l'icnografia ed il profilo del contorno dell'ombra propria della sfera in quistione: esse equazioni esprimono che le medesime proiezioni sono tre ellissi che hanno i centri nell'origine delle coordinate.

OSSERVAZIONE TERZA.

Le equazioni generali del contorno dell'ombra propria, trovate poc' anzi, insegnano che le proprietà di questi contorni dipendono dalla superficie che impedisce il passaggio ai raggi di luce e dalla direzione dei medesimi; più che le prime di queste proprietà sono di quelle colle quali si distingue una specie di linea da un'altra specie; e le seconde in vece di quelle che servono a distinguere le linee di una stessa specie. Quindi individuata la superficie che impedisce il passaggio alla luce, rimarrà individuata anche la specie delle linee rappresentanti i contorni delle sue ombre proprie; di modo che variando la sola direzione dei raggi di luce, varieranno bensì le linee rappresentanti i contorni delle sue ombre proprie, ma queste saranno tutte di una stessa specie o famiglia: interessante sarà conseguentemente la

PROPOSIZIONE XV.

Data la superficie che impedisce il passaggio ai raggi di luce, ed una linea in essa superficie, scoprire se questa possa rappresentare il contorno dell'ombra propria di essa superficie, e qual direzione dovrebbero avere all'uopo i raggi medesimi.

Sia $f(x, y, z) = 0$ l'equazione della linea data nella superficie espressa dall'equazione $F(x, y, z) = 0$ pure data.

Chiamando a, b , come superiormente, i due parametri della parallela ai raggi di luce che passa per l'origine delle coordinate, le equazioni delle linee che possono rappresentare i contorni in quistione saranno

$$F(x, y, z) = 0, \left(\frac{dF}{dz}\right) + a\left(\frac{dF}{dx}\right) + b\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0;$$

e però mediante un'opportuna determinazione delle quantità a, b dovranno sussistere insieme le tre equazioni

$$F(x, y, z) = 0, f(x, y, z) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dz}\right) + a\left(\frac{dF}{dx}\right) + b\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0$$

indipendentemente dalle variabili x, y, z .

Pertanto, eliminate due delle medesime variabili da esse equazioni, se la risultante si potrà soddisfare mediante un'opportuna determinazione dei parametri a, b ed indipendentemente dalla variabile rimasta, la linea data nella superficie che impedisce il passaggio alla luce rappresenterà il contorno dell'ombra propria della medesima superficie, ed i raggi di luce saranno paralleli alla retta che passa per l'origine delle coordinate, e che ha per parametri i valori particolari di a, b determinati per soddisfare la detta equazione risultante.

Nell'equazione

$$r' = \left(\frac{dz}{dx}\right)p' + \left(\frac{dz}{dy}\right)q',$$

che rappresenta il piano passante per l'origine delle coordinate parallelamente al tangente la superficie data, considerando la z funzione delle x, y , e la y funzione della x , la sua derivata rispetto a quest'ultima variabile risulta

$$0 = \left\{ \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) \right\} p' + \left\{ \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \right\} q';$$

e però, se si sostituissero in questa e nella precedente in luogo di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$ i loro valori in x, y cavati dall'equazione della superficie che impedisce il passaggio alla luce, e nelle risultanti in vece di y , $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ si ponessero i loro valori desunti dalla relazione stabilita, e poscia si eliminasse da queste ultime due la x , otterrebbe una sola equazione, la quale sarebbe il luogo geometrico delle infinite rette, le cui equazioni si ottengono facendo variare la x nelle equazioni anzidette o nelle loro equivalenti

$$q' = -p' \left\{ \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) \right\} : \left\{ \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \right\},$$

$$r' = p' \left[\left(\frac{dz}{dx}\right) - \left(\frac{dz}{dy}\right) \left\{ \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) \right\} : \left\{ \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \right\} \right].$$

Ora, se la relazione stabilita fra y ed x sarà quella somministrata dal contorno dell'ombra propria, questo luogo geometrico dovrà essere la retta che passa per l'origine delle coordinate parallelamente alle rette generatrici della superficie involvente: quindi dovranno essere costanti le quantità che moltiplicano in queste ultime equazioni l'ordinata p' , o sia soddisfatte le due equazioni

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = a \left\{ \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \right\},$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) - a \left(\frac{dz}{dy}\right) = b$$

mediante determinazione opportuna delle costanti a, b , affinchè la linea data dall'equazione $f(x, y, z) = 0$, e situata nella superficie espressa dalla $F(x, y, z) = 0$, rappresenti il contorno dell'ombra propria di questa medesima superficie.

I valori delle costanti a, b che soddisfaranno queste ultime equazioni, sostituiti nelle $q' = -ap'$, $r' = bp'$, daranno una retta parallela ai raggi di luce e passante per l'origine delle coordinate: p', q', r' qui rappresentano le coordinate di un punto qualunque della medesima retta.

ESEMPPIO. Sia $x^2 + y^2 - 4z = 0$ l'equazione della superficie che impedisce il passaggio alla luce, ed $y + x - 2 = 0$ un'equazione del contorno dell'ombra che la superficie porta sopra sè stessa, l'altra essendo la medesima della superficie; e sarà

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{x}{2}, \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{1}{2}, \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = 0, \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{y}{2}, \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{1}{2}, \left(\frac{dy}{dx}\right) = -1.$$

Sostituendo questi valori nelle due equazioni di condizione, essi le riducono alle seguenti:

$$\frac{1}{2} = a \cdot -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - a \frac{y}{2} = b, \text{ o sia } a = -1, \text{ ed } (1 + a)x - 2a = 2b,$$

le quali danno $a = -1$, e $b = 1$. Quindi le due equazioni della retta che passa per l'origine delle coordinate, ed è parallela ai raggi di luce, saranno

$$q' = p', r' = p';$$

vale a dire, ammesso l'asse delle z verticale e diretto dall'alto al basso, quello delle x il comune ai piani ortografico ed icnografico, e diretto a destra, e quello delle y diretto verso il disegnatore; affinchè il contorno dell'ombra propria della paraboloide di rotazione dato dall'equazione $x^2 + y^2 - 4z = 0$ abbia l'icnografia nella retta espressa dalla $y + x - 2 = 0$, i raggi di luce dovranno avere la direzione ordinaria.

OSSERVAZIONE QUARTA.

Quando sia già noto che la linea data nella superficie che impedisce il passaggio alla luce rappresenti effettivamente il contorno dell'ombra propria della medesima superficie, la direzione dei raggi di luce si potrà anche determinare colle cose esposte nelle proposizioni dichiarate relativamente alla determinazione delle stesse ombre proprie.

Ad esempio: la linea IMZ (fig. 16) esprime l'icnografia dell'ombra propria del toro rappresentato dalle figure quindicesima e sedicesima; qual sarà la direzione dei raggi di luce?

Dal punto Q , dove l'icnografia IMZ tocca la periferia AQE , si tiri la retta QCG , e ad essa la perpendicolare CV ; quest'ultima sarà l'icnografia di una retta parallela ai raggi di luce.

Facciasi CG eguale alla AF , descrivasi col centro G l'arco circolare CsL , si prenda GJ eguale alla VQ , tirisi JL perpendicolare alla stessa CG , congiungasi GLH , e sarà GHC l'angolo che fanno i raggi di luce col piano icnografico:

I raggi di luce adunque debbono essere paralleli alla retta che ha CV per icnografia, e che fa con questa un angolo eguale al GHC . Volendo l'ortografia di questa parallela ai raggi di luce, essa si otterrà colla regola esposta nel corollario della proposizione dichiarata al paragrafo sesto della prima parte.

In ultimo egli è evidente che se la linea rappresentante il contorno dell'ombra propria di una data superficie sarà una retta, infinite saranno le direzioni che potranno avere i raggi di luce, come risulta dalle due prime proposizioni.

OSSERVAZIONE QUINTA.

A compimento di quanto ideai d'espore in questa parte, dichiarerò qui brevemente i principj generali, dai quali discendono tutte le regole grafiche esposte, e coi quali potrà chiunque istradarsi, volendo delineare il contorno dell'ombra propria di qualunque altra superficie.

Per determinare il contorno dell'ombra propria di una superficie si osservi se avvi un'altra superficie, di cui si conosca già l'analogo contorno, la quale tocchi la proposta per tutta l'estensione di una linea, e che movendosi opportunamente col variare, se occorre, le sue dimensioni, continui a toccare similmente la proposta medesima, e che la linea variabile del contatto passi per tutti i punti di questa superficie: scoperta tale superficie e la legge del suo movimento, agevolmente si concepirà anche la regola per delineare il contorno richiesto. Imperciocchè questo contorno e l'analogo della superficie mobile considerata in una qualunque sua posizione s'intersecheranno in un punto della linea di contatto fra le due superficie medesime; e però, determinato il segmento fra il contorno dell'ombra propria della superficie mobile, considerata in una sua posizione, e la linea di contatto fra essa e la proposta linea anch'essa conosciuta pel movimento suddetto, questo segmento sarà un punto del contorno desiderato; e conseguentemente nella ripetizione della regola usata per determinarlo si avrà quella per delineare il contorno medesimo. Da questo principio io dedussi le regole per delineare i contorni delle ombre proprie delle superficie di rotazione, spirali e de' canali.

Un altro principio per avviarsi nella ricerca del contorno dell'ombra propria di qualunque superficie è quello di fare a questa superficie tante sezioni piane parallele ai raggi di luce quanti sono i punti che si vogliono del contorno stesso; indi trovare i punti di contatto fra queste sezioni e le loro tangenti parallele alla $O-I$, e poscia trasportare opportunamente le proiezioni di questi punti nel disegno, ovvero di disegnare le proiezioni ortogonali delle sezioni medesime sul piano nel quale vuolsi l'analogha proiezione del contorno dell'ombra, e poi determinare i punti di contatto fra queste proiezioni e le loro tangenti parallele alla proiezione ortogonale della $I-O$ e fatta sul medesimo piano, giacchè questi punti di contatto sono altrettanti punti della proiezione dimandata del contorno dell'ombra propria in quistione.

OSSERVAZIONE SESTA.

Siccome un piano esposto ai raggi di luce e non parallelo ai medesimi risulta da una banda tutto illuminato, e dall'altra tutto in ombra, ed il disegno di un piano rappresenta propriamente una sola delle sue facce; così la porzione di un disegno rappresentante un piano contornato dovrassi ombreggiare ovvero lasciare in luce, secondo che esso esprimerà di esso piano la faccia illuminata ovvero l'altra. Ma fissata la posizione sì del piano obbiettivo che di quello in cui è fatto il suo disegno, non che una retta

parallela ai raggi di luce e la banda dalla quale essi raggi arrivano, rimane evidentemente deciso se debbasi o no ombreggiare il disegno del medesimo piano; pertanto utilissima sarà pei disegnatori la

PROPOSIZIONE XVI.

Scoprire se debbasi ombreggiare ovvero lasciare in luce sì l'ortografia che l'icnografia di un piano, essendo date le sue tracce ortografica ed icnografica, e fissata non solo la parallela ai raggi di luce, ma ben anche la parte dalla quale essi raggi pervengono.

Sia CAm (tav. V, fig. 30) la traccia icnografica, ed AB l'ortografica del piano, GS l'icnografia, e gs l'ortografia di una parallela ai raggi di luce, e questi siano diretti da $G-g$ verso $S-s$, e la LM secondo il solito esprima l'asse comune ai piani coordinati ortografico ed icnografico.

Si conduca dal punto D della traccia CA la FDf perpendicolare all' LM , dall' F della fDF ed anteriore allo stesso D si tiri la $ICFE$ parallela alla I , e dal segmento f la if parallela alla O : eseguito questo, tirinsi dai segmenti C , E le Cc , Eg perpendicolari alla LM , ed uniscansi i punti c , g ; il punto H comune alle rette cg , if trovandosi, per rispetto all' f , dalla banda da cui pervengono i raggi di luce o sia nella retta if terminata in f , il disegno ortografico del piano dato si dovrà ombreggiare. All'opposto, se il punto H risultasse nella fH' prolungamento della if , converrebbe lasciare il disegno medesimo in luce.

Così dal punto g della traccia ortografica del piano dato si tiri NgE perpendicolare alla LM , dal segmento E la IER parallela alla I , e dal punto N situato nella EN e superiore al g conducasi la $TNpM$ parallela alla O ; indi dai segmenti p ed M tirinsi le pP , Mm perpendicolari anch'esse alla LM , e congiungasi Pm : quest'ultima retta segnando la IER nel punto R che trovasi, rispetto all' E , verso la parte opposta da cui arrivano i raggi di luce o sia nel prolungamento della IE terminata in E , insegua che l'icnografia del piano dato sarà in luce; che se il punto R si trovasse, rispetto all' E , dalla banda stessa da cui pervengono i raggi medesimi, l'icnografia si dovrebbe ombreggiare.

Per un punto fissato nello spazio a cui è voltata la faccia del piano obbiettivo rappresentata dall'ortografia di esso piano s'immagini la retta parallela ai raggi di luce, e diretta pel verso da cui essi arrivano: se il piano obbiettivo sarà incontrato da questa retta, i raggi di luce percooteranno contro la faccia del piano opposta a quella voltata al punto stesso fissato, per cui rimarrà questa in ombra; quindi in ombra dovrà essere anche l'ortografia di essa faccia o sia del piano. Pel contrario, se il piano obbiettivo sarà incontrato in vece dal prolungamento della medesima retta, i raggi di luce illumineranno la faccia del piano obbiettivo voltata verso il punto fissato; e però si dovrà lasciare in luce l'ortografia della faccia medesima o sia del piano obbiettivo stesso.

Ma le ortografie del punto fissato e dell'incontro del piano obbiettivo colla retta immaginata hanno nell'ortografia di questa retta una correlativa disposizione affatto affatto simile a quella che hanno i medesimi punti sulla retta stessa; adunque se l'ortografia dell'incontro anzidetto sarà in quella della retta immaginata, l'ortografia del piano ombreggerassi, altrimenti si lascerà in luce.

Ora essendo il punto F nella retta FDf ed anteriore al D della medesima, trovasi collocato nello spazio a cui è voltata la faccia del piano CAB espressa nell'ortografia di esso piano; e però questo potrà esprimere il punto fissato suddetto. Così per essere le if , IF l'ortografia e l'icnografia della parallela ai raggi di luce tirata per lo stesso punto F ovvero $F-f$, e le Cc , Eg perpendicolari alla LM , il segmento delle if , cg , cioè il punto H , sarà l'ortografia del punto d'incontro del piano obbiettivo dato e della retta $IF-if$.

Quindi, siccome i raggi di luce sono diretti da $I-i$ verso $F-f$, l'ortografia del piano ACB , come anche quella di qualunque sua porzione si dovrà ombreggiare; giacchè il punto H risulta nella if ortografia della parallela ai raggi di luce tirata pel punto $F-f$ verso la parte da cui pervengono i raggi medesimi.

Facendo per l'icnografia, e propriamente pel punto $N-E$ tutto ciò che si fatto per l'ortografia o sia pel punto $F-f$, si conclude che l'icnografia del piano CAB devesi lasciare in luce, perchè il segmento R trovasi nel prolungamento dell'icnografia IE della parallela ai raggi di luce tirata pel punto $E-N$, verso la parte dalla quale arrivano i raggi medesimi.

Così, se il punto H risultasse nel prolungamento della if , si lascerebbe in luce anche l'ortografia del piano in quistione; e se R cadesse nella EC , in vece si acquerellerebbe anche l'icnografia.

OSSERVAZIONE. Potrei esporre, rispetto ad alcune particolari superficie cilindriche, coniche ed altre, delle considerazioni analoghe a quelle qui esposte pei piani; ma siccome rarissimi sono i casi in cui queste superficie siano disposte per modo che risultino da una banda tutte illuminate, e dall'altra in ombra; così passerò in vece a parlare delle ombre portate.

PARTE TERZA.

DEI CONTORNI DELLE OMBRE PORTATE.

SE si estendesse la superficie involvente sino al corpo sulla cui superficie si rende visibile l'ombra portata, essa la segherebbe lungo il contorno di quest'ombra medesima. Ma se una retta mobile e parallela ai raggi di luce, nel muoversi, incontra costantemente il contorno dell'ombra propria, essa genera la stessissima superficie involvente; adunque il contorno dell'ombra portata rappresenterà l'ombra stessa che cagionerebbe il contorno della propria. Quindi determinato che si avrà il contorno dell'ombra propria, qualora non sia già noto per la natura medesima della quistione, si potrà nella delineazione del contorno dell'ombra portata prescindere affatto dal corpo che impedirà il passaggio ai raggi di luce, considerando questo contorno come l'ombra portata dal primo.

In virtù di questa proprietà, le quistioni che hanno per oggetto la delineazione dei contorni delle ombre portate si riducono alla seguente proposizione puramente geometrica: « *Date due superficie, delle quali una sia la involvente stessa, trovare la loro intersecazione* », ed a questa appunto riduconsi le proposizioni che espongo in questa parte, ordinate secondo le differenti superficie sulle quali si rendono visibili le ombre portate.

DELLE OMBRE PORTATE SULLE SUPERFICIE PIANE.

PROPOSIZIONE I.

Trovare l'ortografia e l'icnografia dell'ombra portata da una retta su di un piano, conoscendosi l'ortografia e l'icnografia della retta medesima, e le tracce ortografica ed icnografica del piano.

Siano CF , CE (fig. 31) le tracce del piano dato, ed AB , ab l'icnografia e l'ortografia della retta che cagiona l'ombra.

Condotte le ARG , BSH parallele alla I , le Aa , Bb , Rr , Ss , Gg , Hh perpendicolari alla ML , le aq , bp parallele alla O ; e congiunte rg , sh , e tirate le qQ , pP perpendicolari anch'esse alla ML ; nelle rette PQ , pq che

passano pei segmenti P, Q, p, q , così determinati, avransi l'ortografia e l'icnografia richieste.

Tutte le rette parallele ai raggi di luce e che incontrano la $AB-ab$ sono nel piano che passa per questa retta parallelamente ai raggi medesimi, e però l'ombra in quistione dovrà essere in questo piano e nel dato; sarà essa adunque la retta loro sezione comune.

La retta $BP-bp$ tirata dal punto $B-b$ dell'obbiettiva essendo parallela ai raggi di luce, e le Ss, Hh perpendicolari alla ML , il punto p , segmento delle bp, sh , sarà l'ortografia dell'incontro fra il piano dato e la stessa $BP-bp$, ed il P l'icnografia del medesimo. Similmente $Q-q$ rappresenterà l'incontro dello stesso piano dato colla retta $AQ-aq$ tirata dal punto $A-a$ dell'obbiettiva parallelamente ai raggi di luce; vale a dire saranno $P-p, Q-q$ i punti del piano avente le tracce CF, CE , nei quali cadranno le ombre portate dai punti $B-b, A-a$ della retta obbiettiva.

Ora i punti $P-p, Q-q$ trovandosi nelle rette $BP-bp, AQ-aq$, e però nel piano che passa per la $AB-ab$ parallelamente ai raggi di luce ed anche nel piano dato, apparterranno essi alla sezione di questi due piani, e conseguentemente alla retta che rappresenta l'ombra in quistione. Quindi PQ, pq icnografia ed ortografia della retta che passa pei punti $P-p, Q-q$ saranno, la prima l'icnografia, e la seconda l'ortografia dimandate.

COROLLARIO I. Se il piano dato sarà verticale, le hH, gG risulteranno parallele alla CF ; e però le sh, rg saranno i prolungamenti delle stesse Rr, Ss .

Pertanto (fig. 32), condotte le AR, BS parallele alla I , le Aa, Bb, Rr, Ss perpendicolari alla ML , e le aq, bp parallele alla O , si avranno immediatamente in p, q due punti dell'ortografia richiesta: l'icnografia sarà la stessa CE .

La regola qui dichiarata essendo affatto indipendente dalla traccia CF , essa varrà anche pel caso che il piano dato sia parallelo o si confonda collo stesso ortografico. In quest'ultimo caso, frequentissimo in pratica, le operazioni necessarie per avere l'ortografia dell'ombra portata sul piano ortografico della retta $AB-ab$, comunque situata nello spazio, sono indicate dalla figura trentatreesima.

Ritenuto che il piano sul quale cade l'ombra sia lo stesso ortografico, e supposto che la luce abbia la direzione ordinaria; condotta l'orizzontale bv (fig. 33) sino ad incontrare il prolungamento della verticale Sp , si avranno le rette vp, vb, TS, TB eguali fra loro; cioè l'orizzontale bv e la verticale vp entrambi eguali alla BT , che esprime l'aggetto o la distanza del punto $B-b$ dal piano ortografico.

Quindi, in questa ipotesi, tirata l'orizzontale bv , e poi la verticale vp eguali amendue all'aggetto che ha il punto $B-b$ della retta obbiettiva dal piano ortografico, avrassi immediatamente il punto p ; e così facendo anche per un altro punto $A-a$ della medesima obbiettiva, si otterrà il corrispondente punto q , e conseguentemente in un tratto la retta pq senza verun bisogno dell'icnografia AB .

OSSERVAZIONE I. Quando la retta obbiettiva sarà parallela al piano ortografico, e questo sia il piano stesso su cui cade l'ombra, l'ortografia dell'ombra o sia l'ombra stessa sarà una retta parallela alla ab ; e però basterà trovare uno dei due punti p, q , giacchè tirando per questo la parallela alla ab , si avrà in essa l'ortografia dimandata.

Se l'obbiettiva, oltre di essere parallela al piano ortografico su cui cade l'ombra, sarà anche orizzontale; più nel piano ortografico vi sia disegnata una verticale ab (fig. 34), e nel prolungamento BC dell'ortografia AB abbiasi la distanza che ha la retta obbiettiva medesima dal piano ortografico, ciò che succede spesso per gli angoli delle fabbriche:

Condotta CP , che faccia l'angolo PCB semiretto, e poscia l'orizzontale PQ , in questa avrassi immediatamente l'ombra cercata, nell'ipotesi che la luce abbia la direzione ordinaria.

Così se l'ortografia data, in vece di essere l'orizzontale AB , fosse la verticale ab ;

Tirata la qp parallela alla stessa ab , e distante da questa quanto l'aggetto della medesima obbiettiva dal piano ortografico, avrebbesi nella pq l'ombra dimandata.

OSSERVAZIONE 2. Qualunque sia la posizione del piano su cui cade l'ombra, se la retta obbiettiva lo incontrerà, e sarà nota sì l'ortografia che l'icnografia dell'incontro; congiunta questa ortografia (fig. 31) col punto p , e l'icnografia col P , determinati ambidue superiormente, avrassi nella prima retta l'ortografia, e nella seconda l'icnografia dell'ombra portata sul piano dato dalla retta $AB-ab$, senza determinare i punti q , Q .

COROLLARIO 2. Ammesso il piano dato perpendicolare all'ortografico (fig. 35), ed anche l'icnografico stesso (fig. 36), si troverà PQ icnografia dell'ombra portata dalla data retta $AB-ab$, facendo per l'ortografia ab ciò che si è fatto per l'icnografia AB nel corollario primo per avere pq (fig. 32);

Cioè condurransi le ar , bs parallele alla O , le aA , bB perpendicolari alla ML , le AQ , BP parallele alla I ; in fine si tireranno le rQ , sP anch'esse perpendicolari alla ML , e nei segmenti P , Q avransi due punti dell'icnografia PQ dimandata.

Se i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, ed il piano su cui cade l'ombra sia l'icnografico; condotta AV (fig. 36) parallela alla ML , ed estesa sino ad incontrare il prolungamento della rQ , si avrà evidentemente QV eguale a ciascuna delle VA , Tr , Ta ;

E però tirando dal punto A della AB , icnografia dell'obbiettiva, la AV parallela alla ML , indi VQ perpendicolare alla stessa, ed ambi eguali alla Ta , cioè all'altezza che avrà il punto $A-a$ sopra il piano icnografico, e facendo altrettanto per un altro punto B della stessa AB , e congiunti i punti P , Q , si avrà nella PQ l'icnografia richiesta.

Qualunque sia la direzione dei raggi di luce, se il piano dato sarà l'icnografico, e la retta obbiettiva parallela ad esso; trovato uno dei punti P , Q , tirando per esso una parallela alla AB , avrassi immediatamente l'ombra portata dalla retta $AB-ab$, perchè il piano che passa lungo la retta $AB-ab$ parallellamente ai raggi di luce sega l'icnografico in una retta parallela alla stessa $AB-ab$, e però alla sua icnografia AB .

COROLLARIO 3. Se $A-a$, $B-b$ rappresenteranno i termini della retta obbiettiva, i punti p , q saranno quelli dell'ortografia, e P , Q dell'icnografia dell'ombra portata da essa obbiettiva sul piano dato.

OSSERVAZIONE 3. Conoscendosi l'ortografia e l'icnografia di un corpo di facce piane, e volendo l'ortografia e l'icnografia dell'ombra portata da esso sopra di un dato piano,

Si troveranno le ortografie ed icnografie delle ombre portate da tutte quelle rette terminate che esprimeranno gli spigoli di esso corpo, e nel poligono costituito da alcune di queste icnografie, ed entro cui cadranno le altre, si avrà l'ortografia richiesta, come nell'analogo poligono formato da varie icnografie avrassi la corrispondente e voluta icnografia.

PROPOSIZIONE II.

Date le tracce ortografica ed icnografica di un piano, e l'ortografia e l'icnografia di una curva qualunque, trovare l'ortografia e l'icnografia dell'ombra portata da questa curva sul piano.

Siano abc , ABC l'ortografia e l'icnografia (fig. 37) della linea che cagiona l'ombra, e CF , CE le tracce del piano su cui cade la medesima.

Facciasi BG parallela alla I , le Bb , Dd , Gg perpendicolari all'asse ML , e trovisi n segmento della dg colla bn parallela alla O , e sarà n un punto dell'ortografia pnq dimandata. Così, tirando la nN anch'essa perpendicolare alla ML , nel segmento N si avrà un punto dell'icnografia PNQ richiesta: tutto è per sè evidente.

OSSERVAZIONE 1. Quanto alle semplificazioni che si possono fare alla regola qui esposta per la determinazione dei punti n , N e di tutti gli analoghi, nel caso che il piano dato, cioè quello sul quale cade l'ombra, sia parallelo all'ortografico od all'icnografico, ovvero si confonda con uno di questi, si veggano i corollarj primo e secondo dell'antecedente proposizione, i quali si estendono a questa proposizione senza verun cambiamento.

OSSERVAZIONE 2. Allorchè la linea obbiettiva sarà piana e parallela al piano ortografico, o sia la sua icnografia sia una retta AC (fig. 38) parallela all'asse ML , i triangoli bmn , $b'm'n'$, -- formati dalle orizzontali mn , $m'n'$, --, dalle verticali bm , $b'm'$, -- e dalle bn , $b'n'$, -- parallele alla O , i quali sono sempre simili, saranno anche eguali, per l'egualianza dei TBd , $T'B'd'$, -- che ha luogo in questo caso; e però le rette bn , $b'n'$, -- saranno fra loro parallele ed eguali.

Quindi, determinato uno dei punti n , n' , --, si avrà l'ortografia richiesta, copiando in pnq opportunamente la stessa linea obbiettiva abc , ovvero tirando dai punti della abc delle rette eguali e parallele alla bn ; giacchè gli altri estremi di queste risulteranno nella stessissima ortografia dimandata.

Così, se la linea obbiettiva sarà parallela al piano icnografico, trovato un punto dell'ombra portata da essa su questo piano, si avranno in un tratto anche gli altri, ecc.

OSSERVAZIONE 3. Se la linea obbiettiva sarà in un piano perpendicolare all'asse ML , non si potrà soddisfare la proposizione colla regola anzi esposta. In questo caso, rappresentata colla EF (fig. 39) la sezione fatta al piano ortografico da quello della stessa obbiettiva, e supposto questa linea adattata in ABC al piano ortografico mediante una rotazione fatta attorno alla FE medesima, per avere l'ortografia e l'icnografia dell'ombra portata da essa linea sul piano avente per traccia ortografica OG , ed icnografica Og ;

Si farà Fb eguale alla orizzontale BE , bdg parallela alla I , le dD , gG perpendicolari alla ML , e si determinerà n segmento della DG e della En condotta parallelamente alla O , indi si condurrà nN perpendicolare essa pure alla ML , e si avrà in n un punto dell'ortografia qnp , ed in N uno dell'icnografia dimandate.

Imperciocchè, essendo Fb perpendicolare alla ML ed eguale alla BE , saranno E, b l'ortografia e l'icnografia del punto dell'obbiettiva che cade in B dopo la detta rotazione; e però, siccome la $gb - En$ è parallela ai raggi di luce, e le dD , gG , Nn sono perpendicolari alla ML , sarà $N - n$ il punto del piano avente le tracce OG , Od , nel quale cadrà l'ombra che porterà il punto B dell'obbiettiva.

OSSERVAZIONE 4. Le proiezioni della linea che cagiona l'ombra e le tracce del piano sul quale vien portata la medesima si possono supporre disposte talmente, che i raggi di luce incontrino il piano prima della linea stessa: in questo caso, benchè la quistione esprima geometricamente qualche cosa di reale, ciò non ostante è dessa assolutamente immaginaria sotto a quell'aspetto che si considera in questo luogo.

Similmente, se l'ortografia e l'icnografia del piano dato trovansi ambedue od una di esse in ombra, per l'acquerellamento sarà affatto inutile la determinazione dell'analogha proiezione dell'ombra portata sul piano medesimo.

Pertanto il disegnatore, prima d'incominciare la delineazione delle proiezioni di queste e simili ombre portate, dovrà porsi al fatto di queste accidentalità: si porrà al fatto della prima con uno di quei metodi che naturalmente gli si presenteranno, e della seconda mediante l'ultima proposizione trattata nella parte precedente.

DE' CONTORNI

DELLE OMBRE PORTATE SULLE SUPERFICIE CILINDRICHE.

Quantunque potrei incominciare a parlare de' contorni delle ombre che accadono sulle superficie cilindriche coll' esporre e dimostrare immediatamente l'ultima proposizione che do rispetto ad esse, e poscia dedurre tutte le altre proposizioni, quai corollarj, col fare alcune restrizioni relative ed alle superficie ed alla linea che porta l'ombra su di essa superficie; nulladimeno, siccome con ciò poco o nulla guadagnerei in semplicità, e forse perdere in chiarezza, così io seguirò l'ordine totalmente contrario, cioè incomincerò ad esporre quei casi che s'incontrano più spesso nelle arti, e pei quali sono individuate sì la superficie che la linea che cagiona l'ombra; indi togliendo di mano in mano certe limitazioni, ora alla superficie ed ora alla linea portante l'ombra, finalmente giugnerò insensibilmente alla suddetta proposizione, la quale è senza dubbio la più generale che si possa mai desiderare a questo proposito.

PROPOSIZIONE III.

Determinare l'ortografia dell'ombra che accade nella mezza superficie cilindrica, che ha per ortografia il rettangolo $fMLh$ (fig. 40) avente i lati fM , hL verticali, e per icnografia la semiperiferia circolare anc descritta sulla ac parallela al piano ortografico.

Si descriva la semiperiferia circolare abc , e dal suo punto b di mezzo e dall' a si tirino le bd , ae parallele all' I , e dal punto f e dal g di mezzo della fh le fx , gz parallele alla O , e si estendano queste sino ad incontrare le verticali xk , zl , i cui prolungamenti passano pei segmenti d , e : fatto ciò, descrivasi l'arco xm dell'ellisse che ha gx , gz per due semidiametri conjugati, lemma quattordicesimo, e sarà $Mfmxk$ l'ortografia dimandata.

Essendo la data superficie e la involvente amendue di second' ordine, e la periferia circolare ed orizzontale, che ha per diametro $ac - fh$, una delle linee comuni ad esse, l'altra linea comune alle medesime superficie, cioè il contorno dell'ombra portata in quistione, sarà una periferia ellittica, come si vede al lemma tredicesimo; e però tale sarà anche in generale la sua ortografia.

Condotte dai termini c ed n dei diametri ac , bn fra loro perpendicolari le cp , no parallele anch'esse alla I , e dai punti p ed o le rette pr , oq parallele alla fM , ed estese sino ad incontrare i prolungamenti delle due xg , zg , avrassi evidentemente $rg = xg$, $gq = gz$; cioè le corde rx , zq dell'ortografia si segheranno in parti eguali in g , e conseguentemente sarà g il centro dell'ellisse $xzrq$, e le medesime corde due diametri conjugati di essa.

Conducendo lungo fx il piano perpendicolare all'ortografico, esso passerà evidentemente per un lato della superficie involvente e per la tangente orizzontale di essa che passa pel punto f ; e però sarà esso tangente anche l'altra linea comune alle due superficie cilindriche. Quindi per essere questo piano perpendicolare all'ortografico, la retta fx risulterà tangente la periferia ellittica $xzrq$, e per conseguenza i due suoi diametri qz , rx saranno fra loro conjugati; come si è detto.

Ma egli è evidente che la retta xk rappresenta l'ortografia dell'ombra portata dalla $fM - a$; adunque il contorno dell'ortografia dimandata sarà mxk , e conseguentemente lo spazio che si dovrà ombreggiare $Mfmxk$.

COROLLARIO 1. Conducasi il diametro vs_1 parallelo alla I , si tirino le v_2 , 14 , p_3 perpendicolari alla fh , e le 24 , 35 parallele alla gz , e si avrà in 5 il punto di contatto fra l'ellisse $qxzr$ e la verticale hL , ed in 4 il punto più abbasso della medesima periferia ellittica.

COROLLARIO 2. Tirando il raggio st perpendicolare alla ae , e dal punto t la tm parallela alla fM , m segmento di questa retta colla fh sarà il punto medesimo dove la periferia ellittica $xzrq$ segherà la stessa retta fh .

COROLLARIO 3. Se i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, i punti e , d cadranno negli n , c , e gli angoli zgh , xfh saranno semiretti; e però (fig. 41)

Prese le verticali xg , hz eguali amendue alla fg , saranno gz , gx due semidiametri conjugati dell'ortografia dimandata.

In questo caso, estesa zg verso q , descritto l'arco circolare $\lambda\beta\mu$ col centro g e col raggio eguale alla gz , condotta la verticale $\delta\alpha$ e l'orizzontale $\alpha\beta$ dai termini della $\delta\beta$ perpendicolare al prolungamento della zg , α segamento di queste rette sarà un punto della periferia ellittica dimandata pel lemma quattordicesimo stesso.

Così, fatta gq eguale alla gf , e tirata qm perpendicolare alla fh , avrassi immediatamente m termine superiore dell'arco ellittico in quistione.

PROPOSIZIONE IV.

Una semisuperficie cilindrica avente le rette generatrici verticali ha il rettangolo $fhLM$ (fig. 42) per ortografia, e per icnografia la semiellisse MnL , i cui assi sono le ML , nb ; qual sarà l'ortografia dell'ombra che portano i contorni di questa superficie sopra di essa medesima?

Si determinino i punti d , e , lemma quindicesimo, ove le rette condotte per gli M , b parallelamente alla I segherebbero la periferia ellittica avente per assi ML , bn , e da questi punti si tirino le dz , ex parallele alle Mf , e prolunghinsi sino ad incontrare le gz , fx parallele alla O , e si avranno nelle gx , gz due semidiametri conjugati della periferia ellittica di cui è parte mx porzione curvilinea dell'ortografia dimandata $fm\alpha k$, l'altra parte di questa ortografia essendo evidentemente la stessa verticale xk .

Non espongo la dimostrazione di questa proposizione, perchè sarebbe essa una vera ripetizione di quella della proposizione antecedente.

PROPOSIZIONE V.

Una porzione di superficie cilindrica parabolica avendo per ortografica il rettangolo $abLM$ (fig. 43), che ha i lati bL , aM verticali, e per icnografia il segmento parabolico ordinario erg , di cui è data l'altezza rh , e la corda ehg parallela alla LM ; determinare anche per questa superficie l'ortografia dell'ombra che portano i suoi contorni sopra di essa, nella ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria.

Si determini il punto i , lemma sedicesimo, dove il lato ie dell'angolo semiretto gei incontrerebbe la parabola di cui si conosce l'asse, il vertice ed anche il punto e , e tirisi la iqp parallela alla bL : secondo questa retta cadrà evidentemente l'ortografia dell'ombra che porta la generatrice avente aM per ortografia. Indi si estenda la hr in m ed l , conducasi la el perpendicolare alla re , prendasi $om = \frac{1}{2}mn = \frac{1}{2}hl$, e si congiunga la retta onp , e sarà op la rimanente porzione dell'ortografia dimandata.

Denominate x, y, z le coordinate di un punto qualunque di una parallela ai raggi di luce, e supposta l'origine di esse nel vertice della parabola contorno superiore della superficie cilindrica data, la z diretta verticalmente dall'alto al basso, la y secondo l'asse della parabola stessa, e la x a destra e perpendicolare alle prime due, saranno

$$y = -x + A, \quad z = x + B$$

le equazioni della medesima retta parallela ai raggi di luce, A, B indicando i soliti due parametri. Così nominate x, y , le coordinate di un punto qualunque della parabola anzi detta ed analoghe alle x, y antecedenti, e p il parametro della medesima parabola, sarà $x'^2 = py'$ la sua equazione; cioè quella della sezione della superficie cilindrica che ha per ortografia la retta ab .

Ponendo nelle equazioni della retta parallela ai raggi di luce, in vece delle coordinate x, y, z , rispettivamente $x, y, 0$, se ne ottengono due altre, che danno

$$A = x + y, \quad \text{e} \quad B = -x;$$

e però le equazioni di una retta generatrice della superficie involvente saranno le seguenti

$$y - y_1 = -x + x_1, \quad z = x - x_1.$$

Da queste due ultime equazioni si desume $x_1 = x - z$, ed $y_1 = y + z$; valori i quali, sostituiti nell'equazione $x_1'^2 = py_1$, somministrano

$$(x - z)^2 = p(y + z)$$

per equazione della stessa superficie involvente.

Essendo quest'ultima l'equazione della superficie involvente, ed $x^2 = py$ evidentemente quella della cilindrica data, supposte x, y le sue coordinate, saranno

$$(x - z)^2 = p(y + z), \quad x^2 = py$$

le equazioni delle due linee comuni a queste due superficie.

Ma eliminando la y da queste due equazioni, si ottiene la sola

$$z(z - 2x - p) = 0,$$

la quale si decompone nelle due $z = 0, z - 2x - p = 0$; adunque una delle sezioni sarà rappresentata dalle equazioni

$$z = 0, \quad x^2 = py, \quad \text{e l'altra dalle due} \quad z - 2x - p = 0, \quad x^2 = py.$$

Egli è evidente che la prima di queste sezioni è la stessissima che ha la retta ab orizzontale per ortografia; adunque le due altre equazioni

$$z^2 - 2xz - p = 0, \quad x^2 - py = 0$$

rappresenteranno la sezione di cui si dimanda l'ortografia.

La prima di queste ultime equazioni insegna che l'ortografia di questa sezione o sia dell'ombra portata dalla prima è una retta che sega l'orizzontale am ad una distanza dal punto m eguale a $\frac{1}{2}p$, e la verticale mr ad una distanza dal medesimo punto m , la quale eguaglia p ; e però avendo sopra segata mn eguale alla hl , ed mo alla $\frac{1}{2}hl$, e la hl eguagliando evidentemente il parametro della suddetta sezione, sarà onp l'ortografia medesima; quindi opq esprimerà l'ortografia dimandata.

OSSERVAZIONE. In vece di estendere questa proposizione a qualunque direzione che abbiano i raggi di luce, e di esporre delle simili proprietà per altre analoghe superficie cilindriche individuate, dichiarerò la seguente, la quale richiede bensì l'effettiva delineazione dell'icnografia della superficie medesima, ma vale per qualsivoglia porzione di una superficie cilindrica che abbia le rette generatrici verticali.

PROPOSIZIONE VI.

Data una superficie cilindrica che ha le rette generatrici verticali, e l'ortografia e l'icnografia di una sua porzione qualunque, determinare l'ortografia dell'ombra portata da questo contorno sopra di essa superficie.

Sia $MxbfcL$ (fig. 44) l'ortografia, ed $ye\dot{h}g$ l'icnografia del contorno della superficie cilindrica.

Si conduca la mn parallela alla I , le due mi , no alla Mb , e la io parallela alla O , e si avrà in o un punto dell'ortografia dimandata.

Imperciocchè, essendo la retta io parallela alla O , in essa cadrà l'ortografia dell'incontro tra la superficie cilindrica data e la retta $io - mn$, o sia dell'ombra cagionata sulla superficie medesima dal punto $i - m$. Ma questa retta parallela ai raggi di luce trovasi anche nel piano verticale passante per l' mn ; adunque il detto punto d'incontro sarà anco nella retta avente per ortografia l' ro . Quindi l'ortografia della medesima cadrà necessariamente nel punto o , il solo comune alle rette medesime; ciò che ecc.

Come si è determinata l'ortografia del punto della superficie data, nel quale cade l'ombra portata dall' $i - m$, si determineranno tutti gli altri punti della medesima ortografia dimandata: nella figura sono disegnate anche le linee per determinare le ortografie dei punti della superficie nei quali cadono le ombre portate dagli $e - x$, $e - b$.

OSSERVAZIONE 1. Se per h punto di contatto fra la curva ymg e la sua tangente parallela alla I si condurrà la retta hf parallela alla Mb , determinassi il termine f dell'ortografia fo .

OSSERVAZIONE 2. Siccome la regola qui esposta per determinare il punto o e la dimostrazione di essa non richieggono per la loro sussistenza che il punto $i - m$ sia nella superficie cilindrica; così esse varranno, qualunque sia per essere la linea cagionante l'ombra su tale superficie, purchè si sostituisca quest'ultima linea alla $hm - - fi - -$, che rappresenta quella parte del contorno della stessa superficie cilindrica, la quale cagiona l'ombra avente $fo - -$ per ortografia, e sopra determinata.

OSSERVAZIONE SETTIMA.

Sebbene non sia difficile l'estendere le cose dichiarate qui sopra alle superficie cilindriche che hanno le generatrici orizzontali e parallele al piano ortografico, nulladimeno, siccome l'uso di queste è grandissimo, giacchè tali sono tutte le superficie delle volte a botte; così dichiarerò relativamente ad esse le proposizioni più interessanti; darò principio colla seguente, utilissima ai disegnatori, stante l'uso continuo che potranno fare di essa.

PROPOSIZIONE VII.

L'ortografia dello spaccato ordinario di una volta a botte circolare è il rettangolo arsc (fig. 45), qual sarà l'ortografia dell'ombra portata su di essa dalla periferia della sua sezione circolare, avente per ortografia la retta verticale ac eguale al raggio della medesima sezione, nell'ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria.

Seghisi cd eguale alla ca , facciasi l'angolo dct semiretto, si tiri la verticale dt , e si descriva, lemma quattordicesimo, la porzione intercetta fra le rette ca , cd della periferia ellittica avente per due semidiametri conjugati cd , ct , e sarà questa l'ortografia dimandata; e però *arsdhm* sarà tutto lo spazio che si dovrà ombreggiare.

Per determinare i punti di quest'arco ellittico col lemma citato, e nel modo più semplice, descrivasi l'arco circolare bfe , facendo centro in c , e col raggio ct ; e dai termini della gf perpendicolare alla gt si tirino l'orizzontale gh e la verticale fh , che in h loro incontro avrassi un punto qualunque dell'arco ellittico richiesto, come nel corollario terzo della terza proposizione.

COROLLARIO. Presa $cl = ca$, e condotta l'orizzontale lm , si otterrà in m , segmento di essa colla verticale ca , il termine superiore dell'arco ellittico suddetto.

OSSERVAZIONE 1. Se la direzione dei raggi luminosi sarà qualunque, si descriverà la periferia $ehtf$ (fig. 46) circolare, che abbia il centro nella ac o nel suo prolungamento, ed il raggio eguale alla ab , si tirerà il raggio verticale kf , si farà l'angolo gfk eguale al Γ , condurrassi dal termine e la retta eh parallela alla fg ; indi dai segmenti h , g le due hi , gl orizzontali, e si prolungheranno sino ad incontrare le ai , bl tirate dai punti a , b parallelamente alla O , e si avranno due semidiametri conjugati ai , al della periferia ellittica, di cui è parte la porzione nl curvilinea dell'ortografia dell'ombra che accade sulla superficie cilindrica.

Pertanto, descritta la porzione di quest'ellisse, lemma quattordicesimo, intercetta fra il punto l e la verticale ab , e prolungata l'orizzontale gl in p , avrassi nella linea $nlpdb$ l'intera ortografia del contorno dell'ombra in quistione. Così, conducendo il raggio km perpendicolare alla fg , e dal suo termine m l'orizzontale mn , si determinerà col segmento n di questa e della verticale ab il termine superiore dell'arco ellittico nl suddetto.

OSSERVAZIONE 2. Non espongo le dimostrazioni di queste regole, perchè sarebbero ripetizioni di quelle della proposizione terza; ed in vece passo a determinare gli assi dell'ellisse di cui è porzione la parte curvilinea dell'ortografia in quistione, quando i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria, onde conoscere meglio questa linea, la quale s'incontra, come ho detto, sì spesso nei disegni anche comuni.

PROPOSIZIONE VIII.

Presa ar (fig. 47) eguale al doppio della ac, condotta cn che divida per mezzo l'angolo acr, e segatane la parte ck eguale alla an, sarà questa il semiasse minore dell'ortografia determinata nella precedente proposizione; e presa ce eguale alla ca, e condotta cx perpendicolare alla cn, e l'orizzontale ex, nella cx si avrà il semiasse maggiore della medesima ortografia.

Riferito l'arco del quadrante circolare avente ac per ortografia ai due suoi raggi che passano pei termini di esso, e denominato r il raggio, z , l'ordinata verticale di un suo punto qualunque, ed y , l'ascissa orizzontale corrispondente, si avrà evidentemente

$$y^2 + z^2 = r^2$$

per equazione del medesimo quadrante.

Similmente, chiamate x, y, z le tre coordinate ortogonali di un punto qualunque della retta parallela ai raggi di luce, riferita alle rette di cui sono parti i raggi suddetti, ed alla perpendicolare a queste, e diretta a destra, le equazioni

$$y = x + y, z = -x + z,$$

rappresenteranno la retta parallela ai raggi di luce e passante per quel punto della detta periferia al quale corrispondono le coordinate y, z .

Ponendo nell'equazione $y^2 + z^2 = r^2$, che rappresenta questa periferia, in vece delle y, z , i loro valori desunti dalle due della parallela ai raggi di luce, si ottiene

$$2x^2 + 2xz + y^2 + z^2 - 2xy = r^2,$$

la quale rappresenterà la superficie involvente.

Per essere la superficie involvente espressa da quest'ultima equazione, e la data evidentemente dalla $y^2 + z^2 = r^2$, y e z esprimendo le sue coordinate rettangole, le linee comuni a queste due superficie saranno espresse dalla simultanea sussistenza delle medesime due equazioni, intendendo che siano ora rappresentate dalle x, y, z le coordinate rettangole di un punto qualunque di queste linee. Ma sottraendo dai membri della prima di queste equazioni i cognomini della seconda, si ha

$$2x(z - y + x) = 0, \text{ ovvero } x = 0, \text{ oppure } z + x - y = 0;$$

adunque le intersezioni delle due superficie avranno di comune l'equazione $y^2 + z^2 = r^2$, ed una di esse avrà per seconda equazione $x = 0$, e l'altra in vece $z + x - y = 0$.

Ora egli è evidente che la linea comune alle due superficie, la quale ha per seconda equazione $z + x - y = 0$, è la stessa periferia circolare avente l'ortografia nella retta ac; quindi dalla sussistenza contemporanea delle altre due equazioni

$$y^2 + z^2 = r^2, z + x - y = 0$$

verrà rappresentata quella linea che ha per ortografia l'ellisse in quistione, cioè la seconda sezione delle due superficie cilindriche.

Eliminando la y dalle ultime due equazioni, si ottiene la seguente

$$x^2 + 2xz + 2z^2 = r^2,$$

la quale, essendo fra le sole coordinate x, z , rappresenterà la stessa ortografia sopra descritta.

Chiamato ϕ il raggio vettore di quest'ortografia, tirato dal suo centro al punto corrispondente alle ordinate x, z , ed α l'angolo che esso fa coll'asse delle z , hassi

$x = \phi \operatorname{sen.} \alpha$, e $z = \phi \cos. \alpha$; valori i quali, sostituiti nell'ultima equazione, la riducono alla

$$\phi^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2\alpha + \operatorname{sen.} 2\alpha \right) = r^2.$$

Così chiamando β l'angolo che ha per tangente il doppio del raggio, e ξ quello che bisogna unire a questo per avere 2α , facilmente colle notissime formole trigonometriche si ha

$$\cos. 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} (\cos. \xi - 2 \operatorname{sen.} \xi), \operatorname{sen.} 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} (\operatorname{sen.} \xi + 2 \cos. \xi);$$

valori che, sostituiti nell'equazione fra ϕ ed α , danno la seguente

$$\phi^2 (3 + \sqrt{5} \cdot \cos. \xi) = 2r^2.$$

Quest'ultima equazione insegna che il minimo raggio ϕ vettore corrisponde al massimo valore di $\cos. \xi$, cioè a $\cos. \xi = 1$, ovvero a $\xi = 0$; e che è desso raggio eguale ad

$$r\sqrt{2} : \sqrt{3 + \sqrt{5}}, \text{ oppure ad } \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1);$$

ed anche dice che il massimo è corrispondente a $\cos. \xi = -1$, o sia a ξ eguale a due retti, e che è eguale per conseguenza ad

$$r\sqrt{2} : \sqrt{3 - \sqrt{5}}, \text{ ovvero ad } \frac{r}{2} (\sqrt{5} + 1).$$

Ora ponendo zero in luogo di ξ nell'equazione $2\alpha = \beta + \xi$, costituita sopra, si ha $\alpha = \frac{1}{2}\beta$; adunque il minimo valore di ϕ , il quale è lo stesso semiasse minore ck , deve fare coll'asse delle z l'angolo eguale alla metà di quello che ha per tangente il doppio del raggio. Ma per essere ar doppia di r , e l'angolo acr doppio dell' acu , si ha

$$cr = r\sqrt{5}, \text{ ed } ac + cr : ar = ac : an,$$

$$\text{ovvero } an = 2r^2 : r(1 + \sqrt{5}) = 2r : (1 + \sqrt{5}), \text{ e però } an = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1);$$

cioè la retta an eguale al semiasse minore anzi trovato; come pure si ha

$$\operatorname{tang.} acd = 2, \text{ o sia } acd = \beta;$$

adunque la retta ck , determinata sopra, rappresenta veramente il semiasse minore dimandato.

Così, essendo il triangolo xce simile all' anc , si avrà

$$an : ac = ce : cx,$$

$$\text{ovvero } cx = r^2 : \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1) = \frac{r}{2} (\sqrt{5} + 1);$$

vale a dire la retta cx eguale al semiasse maggiore dell'ellisse medesima; tutto come ho asserito.

OSSERVAZIONE. È singolare che l'asse minore dell'ellisse in quistione, ovvero la parte an della retta ar eguaglia il lato del decagono equilatero inscritto nel cerchio che ha per raggio la ac .

PROPOSIZIONE IX.

Il rettangolo $abdc$ (fig. 48) essendo l'ortografia dello spaccato ordinario di una volta a botte ellittica avente la saetta eguale alla ab , e la semicorda alla a , trovare l'ortografia dell'ombra portata su di essa dalla periferia ellittica della sua sezione verticale, che ha per ortografia la stessa retta verticale ab .

Si faccia kf perpendicolare al prolungamento sa della ca ed eguale alla ab , seghisi ks eguale alla semicorda a , e si costruisca l'angolo kfg eguale al Γ , e la sx parallela alla fg : fatto ciò, si trovino i due segmenti g, x delle rette fg, sx e della periferia ellittica avente per semiassi kf, ks , lemma quindicesimo, ed ai segmenti si conducano le gl, xi orizzontali, ed estendansi sino ad incontrare le due ai, bl condotte dai punti a, b paralellamente alla O ; e nelle rette ai, al , così determinate, avransi due semidiametri conjugati della periferia ellittica, di cui è porzione nl ortografia dimandata.

Condotta l'orizzontale lp , sarà $nlpdb$ l'intero spazio che si dovrà ombreggiare.

OSSERVAZIONE. Per trovare il termine n dell'arco ellittico nl senza descrivere l'arco medesimo, si troverà, lemma decimo, il punto di contatto fra l'ellisse che ha per semiassi kf, ks , e la sua tangente parallela alla fg , e da esso punto si condurrà la retta orizzontale, e questa incontrerà evidentemente l' ab nel punto dimandato.

PROPOSIZIONE X.

Data la traccia nel piano dei profili di una superficie cilindrica avente le rette generatrici orizzontali e parallele al piano ortografico, e data anche l'ortografia ed il profilo di una linea qualunque, trovare l'ortografia dell'ombra portata su di essa superficie da questa linea medesima.

Siano $bcd\epsilon f$ (fig. 49) l'ortografia, e ghl il profilo della linea che cagiona l'ombra, ed mnp sia la traccia della superficie cilindrica fatta al piano de' profili, linee tutte conosciute.

Conducasi l'orizzontale lb , si faccia l'angolo bln eguale al complemento del Γ ; indi si tiri bq parallela alla O , e la nq orizzontale; ed in q , segmento di queste ultime due rette, otterrassi un punto della aqr ortografia dimandata.

S'immagini il piano parallelo ai raggi di luce e che passa per la retta avente il punto l per profilo; questo piano segherà nuovamente la superficie cilindrica nella retta generatrice che ha l'ortografia nella orizzontale nq . Ma in questo piano si trova quella retta parallela ai raggi di luce che ha per ortografia bq ; adunque l'ortografia del punto della superficie cilindrica, nel quale cade l'ombra portata dal $b-l$ della obbiettiva data, si

troverà nelle due rette nq, bq ; e conseguentemente sarà essa in q segmento delle medesime; come volevasi dimostrare.

OSSERVAZIONE. Se la linea ghl coinciderà colla mnp , l'obbiettiva data sarà interamente nella superficie cilindrica; e però se la linea $bcdef$ sarà l'ortografia del lembo di una porzione di essa superficie, la linea aqr determinata sopra esprimerà l'ortografia del contorno dell'ombra che accadrà sulla medesima superficie.

In questo medesimo caso, se una parte del lembo della superficie cilindrica sarà anteriore alla più elevata retta generatrice della superficie medesima, cioè a quella che ha per ortografia l'orizzontale fc tangente la linea mnp , si procederà alla delineazione dell'ortografia del contorno dell'ombra portata da questa parte, come lo indicano le rette eg, gp, pr, er parallele rispettivamente alle bl, ln, nq, bq , colle quali rimane evidentemente determinato il punto r , ortografia dell'ombra che porta quello del lembo, il quale ha la sua ortografia in e , cioè $g-e$.

Così, trovato il punto di contatto m fra il profilo mnp e la sua tangente parallela alla ln , e condotta da questa la am orizzontale, ed estesa sino ad incontrare l'ortografia $abcdef$ del lembo stesso, si avrà a termine superiore dell'ortografia in quistione.

PROPOSIZIONE XI.

Data la direttrice di una superficie cilindrica comunque posta nello spazio, non che una retta parallela alle sue generatrici ed un'altra linea qualsivoglia, trovare l'ortografia e l'icnografia dell'ombra portata su di essa superficie da quest'ultima linea.

Sia $ABC-abc$ (fig. 50) la data direttrice della superficie cilindrica, e $DEF-def$ la linea che cagiona l'ombra, cioè siano ABC, DEF le icnografie, ed abc, def le ortografie di queste linee.

Si tiri BE parallela ad una retta determinata come la NL della figura terza, e conducansi le Ee, Bb perpendicolari all'asse ML : fatto questo, tirinsi le eg, EG rispettivamente parallele alle O, I , e le bg, BG all'ortografia ed icnografia della data parallela alle rette generatrici della superficie cilindrica, e sarà g un punto dell'ortografia, e G uno dell'icnografia dimandate.

Per essere la BE parallela alla retta determinata nello stesso modo della detta NL , il piano che passa per BE parallelamente ai raggi di luce sega la superficie data e la involvente lungo le rette generatrici $BG-bg, EG-eg$, le quali si tagliano in $G-g$; e però questo segmento sarà un punto della sezione della superficie cilindrica data e della involvente; quindi i punti g, G apparterranno, il primo all'ortografia, ed il secondo all'icnografia dimandate; ciò che ecc.

COROLLARIO 1. Per avere l'ortografia e l'icnografia dell'ombra portata su di una data porzione di qualsivoglia superficie cilindrica dai contorni di essa, si sostituirà all'obbiettiva $DEF-def$ il contorno medesimo; ed i punti g, G apparterranno all'ortografia ed icnografia dimandate.

COROLLARIO 2. Ammesse verticali le rette generatrici della superficie cilindrica, e che la linea che cagiona l'ombra sia piana e in un piano parallelo all'ordinaria direzione

dei raggi di luce ed all'asse LM : rappresentata colla $PQ - pq$ (fig. 51) la retta comune a questo piano e ad un altro parallelo all'ortografico ed anteriore alla superficie cilindrica, le ombre portate su questa superficie, dalla suddetta $DEF - def$, e da questa $PQ - pq$ coincideranno; e però espressa colla ABC la traccia icnografica della medesima superficie cilindrica, e fatta Nn perpendicolare all'asse ML , gli angoli TNB , bns semiretti, la Bb parallela alla Nn , il segmento b sarà un punto dell'ortografia $1b2$ dimandata, proposizione quinta. Ma estesa la Bb in T ed s , hansi i due triangoli nbs , NBT rettangoli isosceli perfettamente eguali, i quali danno bs eguale alla BT . Adunque la linea $1b2$ ortografia in quistione sarà eguale perfettamente alla ABC traccia icnografia della superficie cilindrica, e conseguentemente con facilità descrivibile.

Se la superficie cilindrica sarà la metà di quella di un cilindro ordinario avente l'asse verticale, ed $ABLM$ per ortografia (tav. 7, fig. 52), e che l'ombra sia cagionata dalla AB diametro della sua base orizzontale e parallelo al piano ortografico, la richiesta ortografia risulterà la semiperiferia circolare AFB descritta sul diametro AB stesso.

OSSERVAZIONE. Non mi fermo a considerare i casi nei quali la linea direttrice della superficie cilindrica, o quella che cagiona l'ombra, od amendue siano in piani perpendicolari all'asse ML , perchè riescono facilissimi dopo l'esposizione della regola generale ampiamente dichiarata.

DE' CONTORNI

DELLE OMBRE PORTATE SULLE SUPERFICIE CONICHE.

Anche per queste superficie avrei potuto incominciare dall'espore e dimostrare l'ultima proposizione che io dichiaro relativamente ad esse, cioè dalla più generale, e poscia cavarne le altre come altrettanti corollarj, le quali sono evidentemente casi particolari di essa; ma per gli stessi motivi addotti rispetto all'ordine tenuto per le superficie cilindriche, seguirò l'altr'ordine, non solo per le superficie coniche, ma anche per tutte le altre superficie di cui parlerò nel seguito.

PROPOSIZIONE XII.

Data l'ortografia e l'icnografia del vertice di una superficie conica, non che la traccia icnografica di essa e l'ortografia di una sua retta generatrice, determinare l'ortografia e l'icnografia dell'ombra che porta questa retta sulla superficie medesima.

Sia b (tav. 6, fig. 53) l'ortografia, e B l'icnografia del vertice, ed AIC la traccia data della superficie conica, ed ab esprima l'ortografia della sua retta generatrice che porta l'ombra di cui si dimandano le proiezioni.

Condotte BH , bh rispettivamente parallele alle I , O , le hH , aA perpendicolari alla ML asse, si congiunga HA , e dal segmento I si tiri Ii perpendicolare anch'essa alla ML , e congiungansi le rette BI , bi ; e saranno queste, la prima l'icnografia, e la seconda l'ortografia dimandate.

Essendo H l'incontro del piano icnografico colla parallela ai raggi di luce che passa pel vertice della superficie conica, nel piano della AH e della generatrice che porta l'ombra si troveranno tutte le rette parallele ai raggi di luce e che passano per questa medesima generatrice; e però in esso piano troverassi anche l'ombra stessa. Quindi quest'ombra cadrà nella retta generatrice della superficie conica, la quale passa pel segmento I ; e conseguentemente le rette BI , bi , sopra determinate, saranno l'icnografia e l'ortografia dimandate.

PROPOSIZIONE XIII.

Conoscendosi l'ortografia e l'icnografia di un cono retto ordinario che ha l'asse verticale ed il vertice sotto la base, trovare l'ortografia e l'icnografia dell'ombra portata sulla superficie del medesimo dalla periferia della sua base.

Il triangolo abc (tav. 7, fig. 54) ed il cerchio QBG avente il centro in C siano l'ortografia e l'icnografia del cono o della superficie, e la retta $AB - ab$ sia l'asse comune ai piani ortografico ed icnografico.

Si tirino cd , CD , Dd rispettivamente parallele alle O , I , Cc , e pei termini del diametro AB , e pel punto E di mezzo della semiperiferia AGB si conducano le DAF , DGB , DEH , e congiungansi le CF , CG , CH ; indi si tirino le AI , BM , EL parallele alla I , uniscasi MI ed il segmento N al punto L , e si avranno nelle rette LN , MN due semidiametri coniugati della periferia ellittica QLM icnografia dimandata. Così, condotte Gg , Ff , Hh perpendicolari alla ab , tirate bm , ai e l' el pel punto e di mezzo della stessa ab tutte parallele alla O , e congiunte le cfi , chl , cgm , unita im ed estesa el sino ad incontrarla, otterransi nelle rette nl , ni due semidiametri coniugati della periferia ellittica qlm , che esprime l'ortografia richiesta: quindi entrambe queste linee descrivibili facilmente colla regola esposta nel lemma quattordicesimo.

La superficie involvente e la conica sono ambe di second' ordine, e la circonferenza $QBG - ab$ è una delle linee comuni ad esse; adunque l'estremo dell'ombra cagionata dalla circonferenza della base del cono sulla superficie di esso essendo l'altra linea comune a queste due superficie, sarà anch'essa piana, pel lemma tredicesimo, ed in conseguenza una periferia ellittica: quindi tanto la sua icnografia, quanto l'ortografia, le quali sono evidentemente le due linee dimandate, saranno esse pure in generale periferie ellittiche.

Le sezioni ellittiche di una superficie cilindrica ordinaria hanno i centri nell'asse della medesima, le proiezioni delle ellissi hanno i loro centri nelle proiezioni dei centri delle stesse ellissi; adunque le proiezioni delle sezioni ellittiche di una superficie cilindrica ordinaria avranno i centri nelle proiezioni dell'asse della medesima superficie. Pertanto l'icnografia e l'ortografia delle quali si parla, per essere proiezioni di una sezione ellittica della superficie involvente, avranno i centri, la prima nella retta CD icnografia dell'asse di questa superficie, e l'altra nella nl ortografia del medesimo.

La retta $AI - ai$ generatrice della superficie involvente, e la $CF - cf$ generatrice della conica essendo ambedue nel piano delle $DF - df$, $DC - dc$, esse s'incontreranno, ed il loro segmento avrà per ortografia i , e per icnografia I . Questo segmento, per essere

nella superficie conica e nella retta $AI-ai$ che passa pel punto $A-a$ ed è parallela ai raggi di luce, si troverà nella periferia ellittica dell'ombra in quistione; e conseguentemente la sua icnografia sarà nella linea QLM , e l'ortografia nella qlm , cioè nelle periferie ellittiche rappresentanti l'ortografia e l'icnografia dimandate.

Nel modo stesso che ho qui determinato i punti I, i ortografia ed icnografia dell'incontro della superficie conica e della retta passante pel punto $A-a$ parallelamente ai raggi di luce, si determineranno gli analoghi punti per un altro qualunque della periferia della base del cono. Così i punti M, L, m, l , i quali sono visibilmente pei due $E-e, B-b$, ciò che I, i sono pel punto $A-a$, rappresenteranno l'icnografia e l'ortografia dei due punti della superficie conica, nei quali sarà essa incontrata dalle rette che passano pei punti stessi $E-e, B-b$ parallelamente ai raggi di luce.

Il piano delle parallele $AI-ai, BM-bm$, passando per l'asse $CD-cd$ della superficie involvente, segnerà il piano della periferia dell'ombra lungo un suo diametro, il quale dovendo avere i termini nella superficie conica e nelle medesime rette $AI-ai, BM-bm$, avrà per ortografia la im , e per icnografia IM ; quindi queste due rette, come proiezioni di due diametri della periferia ellittica suddetta, risulteranno esse pure diametri delle ellissi qlm, QLM , ed i loro segmenti N, n colle CD, cd saranno i centri di queste medesime due ellissi.

Similmente, per essere il piano tangente alla superficie involvente lungo la generatrice $EL-el$ parallelo a quello delle due rette $AI-ai, BM-bm$, la retta comune ad esso piano ed a quello della periferia dell'ombra portata non solo sarà tangente a questa periferia ed evidentemente nel punto $L-l$, ma sarà esso anche parallelo al suo diametro $MI-mi$ suddetto; e però la sua ortografia e l'icnografia, le quali debbono essere tangenti le due ellissi qlm, QLM nei punti l, L , risulteranno parallele ai diametri medesimi IM, im di queste ellissi.

Essendo i due diametri IM, im delle ellissi QLM, qlm paralleli rispettivamente alle tangenti che hanno i punti di contatto in L, l , le due rette MN, NL saranno semidiametri coniugati dell'icnografia QLM , e le altre due mn, nl dell'ortografia qlm ; come si è detto.

OSSERVAZIONE 1. Tutto quello che ho dimostrato pei due diametri AB, EE' , si estende a due altri diametri qualunque della periferia QBG , purchè siano anch'essi fra loro perpendicolari; cosicchè determinato il punto $D-d$ come sopra, e fatto per due qualunque di questi diametri ciò che si è fatto pei due anzidetti, se ne otterranno due sì per l'ortografia QLM che per l'icnografia qlm , i quali saranno essi pure fra loro coniugati.

OSSERVAZIONE 2. Se il cono non sarà retto, le linee CF, CM, CH dovranno partire non dal punto C centro della periferia QBE , ma bensì dall'icnografia del vertice del cono stesso, cioè dal piede della perpendicolare tirata al piano QBE dal vertice medesimo.

OSSERVAZIONE 3. Se la superficie conica fosse la sola metà posteriore al piano ortografico, cioè quella avente per icnografia il semicerchio AFB , i quadrilateri $ACIQ, aciq$ rappresenterebbero l'uno l'icnografia, e l'altro l'ortografia dell'ombra cadente sulla superficie, siccome è facile a comprendersi, combinando questa proposizione coll'antecedente. Così se la porzione della superficie conica fosse quella avente $CXFB$ per icnografia, l'icnografia e l'ortografia dell'ombra portata sulla superficie stessa da' suoi lembi sarebbero i contorni dei due quadrilateri mistilinei $XCZQ, xczq$ determinati in modo chiaro per la sola ispezione della figura.

OSSERVAZIONE 4. Ammesso che i raggi di luce abbiano la direzione che fissano generalmente i disegnatori, gli angoli IAC, MBC, CEL risulteranno semiretti; e però i punti M, L nella retta che passa pei punti B, E , ed il punto I nella AE' che passa pel punto E di mezzo della semiperiferia AFB .

In questo medesimo caso si potranno trovare i due diametri coniugati *ni, nl* dell'ortografia anco nel seguente modo, il quale con vantaggio si preferirà al generale superiormente esposto, qualora non si debba descrivere anche l'icnografia.

L'ortografia del cono sia il triangolo *EHC* (fig. 55).

Si prenda *AB* eguale all'altezza del cono, e conducasi *AD* perpendicolare alla *AH* ed eguale anch'essa all'altezza del cono, si descriva la periferia circolare *EFM* col centro *B*, uniscansi le *DEF*, *DLM*, e dai segmenti *F*, *M* tirinsi le *FQ*, *MN* perpendicolari alla *EH*, e le *ER*, *TBV* facenti gli angoli *HBV*, *BER* semiretti; indi congiungansi le *CRQ*, *CVN* e la *RF* --, ed otterransi nelle rette *RT*, *TV* due semidiametri coniugati dell'ortografia dimandata.

Se in questa costruzione si fosse unita *DGH*, tirata *GP* perpendicolare alla *EH*, condotta *HS* parallela alla *TV*, e congiunta *RS*, in vece di congiungere *RF*, sarebbe essa un evidentissimo corollario della proposizione anzi esposta: bisogna adunque dimostrare che la retta *RS* deve passare, in questo caso, pel segmento *F* della periferia *EXM* e della retta *DEF*.

Si ponga per brevità *AB* o sia l'altezza del cono eguale ad *a*, *BE* = *r*, *BQ* = *α*, *BP* = *β*, e si avrà

$$AE = a - r, AH = a + r, DE = \sqrt{(2a^2 - 2ar + r^2)}, DH = \sqrt{(2a^2 + 2ar + r^2)},$$

$$\cos. AED = (a - r) : \sqrt{(2a^2 - 2ar + r^2)}, \cos. AHD = (a + r) : \sqrt{(2a^2 + 2ar + r^2)},$$

$$EQ = EF \cos. AED = 2r \cos.^2 AED = 2r (a - r)^2 : (2a^2 - 2ar + r^2),$$

$$PH = 2r \cos.^2 AHD = 2r (a + r)^2 : (2a^2 + 2ar + r^2),$$

$$EQ = r - \alpha, QF = EQ \tan. FEQ = \frac{r - \alpha}{a - r} \alpha; \text{ e però sarà}$$

$$\beta = PH - r = r^2 (2a + r) : (2a^2 + 2ar + r^2),$$

$$\text{ed } \alpha = r^2 (2a^2 - r) : (2a^2 - 2ar + r^2).$$

Così, condotte le *Ra*, *Sb* perpendicolari alla *EH*, ovvero parallele alla *BC* altezza del cono, si avranno le proporzioni geometriche

$$\alpha - aB : r - aB = \alpha : a, bB - \beta : bB + r = \beta : a,$$

le quali danno *aB* = $(a - r) \alpha : (a - \alpha)$, e *bB* = $(a + r) \beta : (a - \beta)$; e però sarà

$$aR = Ea = r - aB = \frac{r - \alpha}{a - \alpha} a,$$

$$bS = bH = r + bB = \frac{r + \beta}{a - \beta} a,$$

$$\text{ed } Eb = 2r - bH = \frac{ar - 2r\beta - a\beta}{a - \beta}.$$

Ora, affinchè il punto *F* sia nella retta *RS*, basta che abbia luogo la proporzione

$$bS + aR : ba = FQ + aR : Qa,$$

o sia la seguente

$$\frac{r + \beta}{a - \beta} a + \frac{r - \alpha}{a - \alpha} a : \frac{r - \alpha}{a - \alpha} a - \frac{ar - 2r\beta - a\beta}{a - \beta} = \frac{r - \alpha}{a - r} a + \frac{r - \alpha}{a - \alpha} a : \frac{r - \alpha}{a - r} a - (r - a),$$

oppure l'equazione

$$\alpha^2 (ar - 2a^2 + r^2) + \alpha\beta (2a^2 + 3ar - r^2) + \alpha^2 (2a^2 - r^2 - ar) \alpha - \beta (2a^2 + ar - r^2) \alpha - 2ra^2 \beta = 0,$$

la quale si ottiene eguagliando il prodotto dei termini estremi di quest'ultima proporzione a quello de' suoi termini medj.

Ma sostituendo in questa equazione, in luogo di α e β , i loro valori trovati, e dividendo la risultante per r^7 , e ponendo per brevità $\frac{a}{r} = n$, si ottiene

$$\begin{aligned} n(4n^4 + 1)(2n^2 - n - 1)(2n - 1) - n(2n^2 + n - 1)(2n + 1)(4n^4 - 8n^3 + 8n^2 - 4n + 1) - \\ 2(4n^2 - 1)(2n - 1) + (2n^2 + 3n - 1)(4n^2 - 1)(2n^2 - 2n + 1) - \\ (4n^2 - 4n + 1)(2n^2 - n - 1)(2n^2 + 2n + 1) = 0, \end{aligned}$$

che facilmente si verifica essere identica; adunque ecc.

OSSERVAZIONE 5. Se la base del cono sarà ellittica, facendo per due diametri conjugati della sua icnografia ciò che si è fatto qui sopra per due diametri della periferia QBE (fig. 54) fra loro perpendicolari, si dedurranno delle conseguenze analoghe.

COROLLARIO. Conducendo dal punto D le tangenti DQ, DP alla periferia QBE , e dai punti Q, P di contatto le Qq, Pp perpendicolari alla ab , avransi nei medesimi contatti P, Q i segmenti dell'icnografia QLM colla periferia QBE , e nei due altri q, f quelli dell'ortografia qlm colla retta orizzontale ab .

OSSERVAZIONE 6. Sebbene si potrebbero avere gli assi dell'icnografia QLM , combinando le regole esposte per trovare due suoi diametri conjugati coll'altra notissima a tutti per ottenere gli assi di un'ellisse, quando siano conosciuti due diametri conjugati di essa; nulladimeno, per avere gli assi di questa icnografia, io espongo la regola seguente, perchè è assai più semplice di quella che risulta dalla detta combinazione.

Sulla $\alpha\beta$ (fig. 56) parallela alla I e diametro dell'icnografia del cono retto facciasi il triangolo $\alpha\delta\beta$ eguale all' abc (fig. 54), gli angoli $\xi\alpha\beta, \alpha\beta\mu$ eguali al Σ ; trovisi il punto λ di mezzo della $\xi\mu$, tirinsi le $\xi\gamma, \delta Cm, \lambda Nx$ perpendicolari alla $\alpha\beta$, ed λmn parallela; e si descriva l'archetto circolare x col centro C e col raggio Cx eguale ad mn , e saranno Nx, Ny due semiassi dell'icnografia in quistione.

PROPOSIZIONE XIV.

Data l'ortografia e l'icnografia del vertice e degli estremi di qualunque porzione di qualsivoglia superficie conica, determinare quelle dell'ombra che portano essi estremi sulla superficie medesima.

Siano V, BAC (fig. 57) le ortografie, e v, bac le icnografie date.

Si trovino le tracce $b'a'c', B'A'C'$ icnografiche della superficie conica e della involvente, lemma secondo, e si tirino le ve, VE parallele rispettivamente alle O, I , e la Ee perpendicolare alla ML asse: fatto questo, pel punto E conducasi la FG segante le tracce anzidette, e dai segmenti G, F

si tirino le Gg , Ff perpendicolari alla ML , e congiungansi le gvn , GVN , indi si traccino le fn , FN parallele anch'esse alle O , I , ed otterrausi i due punti n , N , appartenenti, il primo all'ortografia, e l'altro all'icnografia dimandate.

La generatrice $GN—gn$ della superficie conica, e la $FN—fn$ dell'involvente essendo entrambe nel piano delle FG , $VE—ve$, segheransi, e nel punto $N—n$. Ma il segamento di queste generatrici è lo stesso punto della superficie conica, nel quale cade l'ombra portata da quello del lembo di essa avente a per ortografia; adunque ecc. Quindi facendo per tutte le rette che passano pel punto E ciò che si è fatto per la FG , determineransi tutti i punti dell'ortografia ed icnografia dimandate.

OSSERVAZIONE 1. Se la superficie conica fosse circolare od ellittica, e disposta anche comunque nello spazio, ed il contorno di essa una periferia di cerchio o di ellisse, le ortografie ed icnografie dei punti della superficie medesima, nei quali cadrebbero le ombre portate dai termini dei diametri conjugati dagli estremi di essa, sarebbero termini di diametri conjugati dell'ortografia ed icnografia dell'ombra cadente sulla superficie medesima, e però descrivibili queste ortografie ed icnografie anche colla regola esposta nello stesso *lemma quattordicesimo*.

OSSERVAZIONE 2. Onde delineare l'ortografia e l'icnografia dell'ombra portata su qualsivoglia superficie conica da una linea qualunque, comunque posta nello spazio; trovate che si avranno le tracce icnografiche o le ortografiche, se occorrerà, della superficie involvente e della conica, si procederà colla regola anzi dichiarata, sostituendo alla linea $BAC—bac$ la data direttrice della superficie conica medesima.

OSSERVAZIONE 3. Anche per questa proposizione non mi fermo a considerare i casi che la direttrice o la linea cagionante l'ombra od ambedue siano in un piano perpendicolare all'asse ML per le stesse ragioni recate per le superficie cilindriche.

DE' CONTORNI

DELLE OMBRE PORTATE SULLE SUPERFICIE SFERICHE.

PROPOSIZIONE XV.

Data l'ortografia dello spaccato ordinario di una sfera, trovare quella dell'ombra che porta il suo lembo su di essa, nell'ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria.

Supposta l'ortografia dello spaccato ed in un lo spaccato stesso della sfera rappresentato dal cerchio $ALDS$ (fig. 58) avente il centro in C , e che AD sia il suo diametro orizzontale, si determinerà l'ortografia dell'ombra che vien portata nella cavità della superficie sferica dal suo lembo, nel modo seguente:

Si farà l'angolo BCD semiretto, condurransi le corde GF , KL , -- perpendicolari al raggio BC , o che facciano angoli semiretti col diametro AD , si segheranno le loro terze parti Ga , Kb , --, ed i punti B , a , b , -- apparterranno all'ortografia in quistione.

S'immagini un piano perpendicolare allo spaccato e lungo una delle sue corde GF , KL , --, per esempio, lungo la GF ; e questo segnerà la superficie della sfera nella semiperiferia di un mezzo cerchio avente per diametro la stessa retta GF .

Nel piano di questo semicerchio suppongasì tirata la retta, secondo la quale cade l'ombra del punto F , e prolungata sino ad incontrare la semiperiferia di esso; e da questo punto d'incontro, il quale si trova nella superficie sferica, sia condotta la retta perpendicolare alla FG , e sarà essa anche perpendicolare al piano ALD ; e però il suo piede indicherà nello spaccato l'ortografia del punto della sfera nel quale cade l'ombra portata dallo stesso punto F .

Ora il medesimo semicerchio, rotando attorno al suo diametro GF unitamente alle linee disegnate in esso, si adatti colle medesime al piano ALD , ed in questa situazione la sua semiperiferia cada nella GHF , e la retta che indica la direzione del raggio di luce che passa pel punto F , nella FH ; e con ciò la perpendicolare condotta superiormente alla FG cadrà nella retta Ha tirata dal punto H della semiperiferia GHF perpendicolarmente al suo diametro FG ; e conseguentemente il punto a piede di quest'ultima perpendicolare indicherà nello spaccato ALD l'ortografia anzidetta, e però un punto dell'ortografia del contorno di cui si parla.

Rappresentando la retta FH la diagonale di un cubo, la Ha rappresenterà un suo lato, come lo mostra l'ispezione della figura seconda; e però sarà

$$\overline{FH}^2 = 3 \cdot \overline{Ha}^2. \text{ Ma } \overline{FH}^2 = Fa \cdot FG, \text{ ed } \overline{Ha}^2 = Fa \cdot Ga; \text{ adunque } Fa \cdot GF = 3Fa \cdot aG.$$

Dividendo per Fa ciascuna di queste ultime due quantità eguali, si ha

$$FG = 3 \cdot aG, \text{ ovvero } Ga = \frac{1}{3} \cdot FG;$$

vale a dire il punto a appartenente all'ortografia dell'ombra si trova distante dal G di un terzo della corda corrispondente FG ; ma ciò che ho detto pel punto a vale anche per gli analoghi b , --; adunque tutti i punti a, b , -- dell'ortografia dell'ombra portata dal lembo ALD nello spaccato della sfera sono distanti dai termini G, K , -- delle corde FG, KL , -- rispettivamente di un terzo di esse; ciò che voleva dimostrare.

COROLLARIO 1. Pel punto E , dove la linea Bab -- sega il diametro AD , condotta la retta REQ perpendicolare alla BC , e tirato il raggio CQ , si avrà

$$CR = RE, RQ = 3RE = 3CR,$$

$$\text{e } \overline{CQ}^2 = \overline{CR}^2 + \overline{QR}^2, \text{ e perciò}$$

$$\overline{CQ}^2 = \overline{CR}^2 + (3 \cdot CR)^2 = 10 \cdot \overline{CR}^2 = 5 \cdot 2 \cdot \overline{CR}^2.$$

Ma il triangolo rettangolo ed isoscele CRE dà $2 \cdot \overline{CR}^2 = \overline{CE}^2$; adunque sarà

$$\overline{CQ}^2 = 5 \cdot \overline{CE}^2.$$

E pertanto, condotto il raggio verticale CS , e tirata la tangente ST eguale alla metà di esso, ed uniti i punti C, T ; e dal punto V , dove quest'ultima sega la periferia ASD , tirata la VE perpendicolare al diametro AD , si otterrà il punto E , comune al diametro medesimo AD ed alla ortografia Bab --, senza descrivere questa.

Imperciocchè, per essere $CS = 2ST$, sarà $VE = 2CE$, $\overline{VE}^2 = 4 \cdot \overline{CE}^2$; e però il quadrato della CV o della CQ , il quale eguaglia la somma di quelli delle VE, CE , sarà quintuplo di quello della sola CE ; appunto ecc.

COROLLARIO 2. Essendo le rette Ga, kb , -- ciascuna la terza parte delle FG, KL , --, la curva $BabM$ sarà un arco di ellisse avente per semiasse maggiore il raggio BC , e per semiasse minore $CI = \frac{1}{3} BC$, e perpendicolare a BC stesso.

OSSERVAZIONE 1. Col centro C e col raggio eguale ad un terzo di AC si descriva l'arco di cerchio lk , si segnino in esso i punti f, g, k, l , -- in direzione rettilinea col punto C e rispettivamente cogli F, G, K, L , --, e nelle distanze fg, kl , -- avransi immediatamente la terza parte Ca, kb , -- delle corde FG, K, L , --, quindi in un tratto i segmenti a, b , --.

OSSERVAZIONE 2. S'immaginino calate dai punti F ed a le perpendicolari all'orizzontale AD , e nominisi la prima di esse F , e l'altra a , e C la porzione della medesima orizzontale AD intercetta fra il punto C e la perpendicolare F .

Essendo l'angolo BCD semiretto, e la retta FG perpendicolare alla BC , si avrà evidentemente

$$F - a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot Fa, \frac{1}{\sqrt{2}} (F - C) = \frac{1}{2} FG; \text{ e però}$$

$$F - a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} FG, \text{ o sia } F - a = \frac{4}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} FG = \frac{2}{3} (F - C);$$

quindi

$$3F - 3a = 2F - 2C, \text{ ovvero } a = \frac{F + 2C}{3},$$

risultamento singolare.

COROLLARIO 3. Nelle espressioni della massima ascissa e della corrispondente ordinata trovate nell'osservazione prima della terza proposizione della parte seconda si pongano, in vece delle quantità b, s, c , i loro valori $\frac{1}{3}r, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ relativi all'ellisse BEM , supposto $CD = r$, e si avrà

$$\sqrt{(r^2 s^2 + b^2 c^2)} = \sqrt{\left(\frac{r^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{9}\right)} = \frac{r}{3} \sqrt{5},$$

$$(r^2 - b^2) cs : \sqrt{(r^2 s^2 + b^2 c^2)} = \frac{8}{9} r^2 \cdot \frac{1}{2} : \frac{r}{3} \sqrt{5} = \frac{4r}{3} : \sqrt{5};$$

cioè Cm ascissa massima eguale ad $\frac{r}{3} \sqrt{5}$, ed mn ordinata corrispondente eguale a $\frac{4}{3} CE$, ovvero $Em = \frac{2}{3} \cdot CE$, ed $mn = 2 \cdot Em$.

Quindi, facendo la Em eguale a due terzi della CE , e l' mn doppia della Em e perpendicolare alla CD , avrassi il punto n , a cui corrisponde la massima ascissa dell'ortografia in quistione.

PROPOSIZIONE XVI.

Data l'ortografia dello spaccato ordinario di una sfera, trovare quella dell'ombra che portano i suoi estremi sopra di essa, qualunque sia la direzione dei raggi di luce.

L'ortografia della sfera e ad un tempo il suo spaccato ordinario sia il cerchio $BCDL$ (fig. 59) che ha il centro in O .

Si tiri il diametro BE parallelo, ed il CF perpendicolare all'ortografia O , facciasi l'angolo GBE eguale al Δ , e si tiri GH perpendicolare al diametro BE , ed avransi nelle rette CO, OH due semiassi della periferia ellittica che rappresenta l'ortografia dimandata, e però descrivibile colle regole notissime.

Suppongasi che il semicerchio BFE insieme alle rette BC , GH , rotando indietro attorno al suo diametro BE , si disponga perpendicolarmente a quello dello spaccato; in questa situazione la retta BC cadrà nel raggio di luce che passa pel punto B , ed il punto G nell'incontro di esso colla superficie sferica; e però sarà H l'ortografia di questo medesimo incontro, ovvero del punto della superficie sferica, nel quale cade l'ombra portata su di essa dal punto B .

Similmente descritta la semiperiferia circolare bge sulla corda eb parallela al diametro AB , e fatto l'angolo gbe eguale al GBE , e la gh perpendicolare alla stessa corda be ; e replicando per essa precisamente ciò che ho detto qui sopra pel diametro BE , si conclude essere h l'ortografia dell'ombra cagionata sulla superficie sferica dal punto b .

Ma nei circoli BGE , bge , per essere gli angoli GBE , gbe eguali, si ha pel corollario del lemma diciassettesimo

$$OE:oe = OH:oh;$$

adunque tutti i punti analoghi all' h , cioè appartenenti all'ortografia dimandata, saranno nella semiperiferia ellittica avente le rette CO , HO per semiassi; vale a dire l'ortografia dell'ombra di cui si parla sarà una semiperiferia ellittica convessa CHF , se l'angolo GBE fatto dai raggi di luce col piano ortografico sarà minore di un semiretto, una semiperiferia ellittica CHF concava, se quest'angolo risulterà maggiore di un semiretto; e si ridurrà anche allo stesso diametro CF , qualora il medesimo angolo eguagli un mezzo retto.

OSSERVAZIONE 1. Da a segmento delle GHa , OD condotta la aM perpendicolare alla OD ed eguale alla HC , congiunta OcM , e dal segmento c tirata la cP perpendicolare alla stessa OD , si determinerà il punto P , dove il diametro AD sarà segato dalla ellisse CHF , senza descrivere questa, parte seconda, proposizione terza, osservazione seconda.

Così, tirata En perpendicolare alla verticale OL , ed Hf alla OD , e segata Os eguale alla fn , indi condotta sd perpendicolare alla DO , la dt tangente la periferia BCD , e la tq perpendicolare alla CO , nel segmento M delle due rette Sd , tq si otterrà il punto della periferia ellittica corrispondente alla sua massima ascissa, osservazione dianzi citata.

OSSERVAZIONE 2. Tutte le volte che sarà il quadrato della BH doppio di quello della GH , ovvero l'angolo GBH che fanno i raggi di luce col piano ortografico eguale a quello che fa la diagonale di un cubo con una faccia del medesimo, come succede nella ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria, le ordinate dell'ellisse ortografica CHF parallele all'asse minore di essa saranno la terza parte delle corrispondenti della periferia circolare CDF .

PROPOSIZIONE XVII.

Data l'icnografia di una superficie emisferica che ha la base orizzontale ed è situata sotto la base medesima, trovare l'icnografia dell'ombra che accade in essa superficie.

L'icnografia data e ad un tempo lo spaccato della superficie sia il circolo $ACBD$ (fig. 60) che ha il centro in E .

Condotto il diametro AB parallelo, ed il CD perpendicolare alla I , si faccia l'angolo HAB eguale al Σ , cioè a quello che fanno i raggi di luce coll'orizzonte, e si tiri la HF perpendicolare alla AB , ed avransi nelle rette EF , ED due semiassi dell'ellisse rappresentante l'icnografia dimandata.

Tralascio la dimostrazione di questa soluzione, perchè sarebbe una ripetizione di quella dell'antecedente.

OSSERVAZIONE. L'icnografia in quistione sarà la lunula $CADG$, o lo spazio $CADF$, ovvero il semicircolo ACD , secondo che l'angolo Σ sarà maggiore, oppure minore, o eguale ad un mezzo retto.

Così, se i raggi di luce avranno l'ordinaria direzione, il semiasse EF risulterà eguale ad un terzo dell' ED , come nella penultima proposizione. Di fatto, se AH esprimesse la diagonale di un cubo, AF esprimerebbe quella di una sua faccia, ed FH un suo lato; e però sarebbe

$$\overline{AH}^2 = 3 \cdot \overline{FH}^2. \text{ Ma è } \overline{AH}^2 = AF \cdot AB, \text{ ed } \overline{FH}^2 = AF \cdot FB, \text{ e perciò}$$

$$AF \cdot AB = 3AF \cdot FB, \text{ o sia } 2 \cdot FB = \frac{2}{3} BE;$$

adunque la rimanente parte della BE , cioè l' EF , eguaglierà $\frac{1}{3} BE$, o sia $\frac{1}{3} DE$, come nella citata proposizione.

PROPOSIZIONE XVIII.

Trovare l'ortografia dell'ombra che accade nell'ottava parte ordinaria di una superficie sferica, o sia sul triangolo sferico trirettangolo avente per ortografia il quadrante circolare ABC (fig. 61) che ha il raggio AB verticale.

Per facilità il piano ortografico passi pel centro della sfera, ovvero lo stesso arco AC del quadrante ABC sia anche un lato del triangolo sferico trirettangolo.

Sulla corda AD parallela alla O si descriva il semicircolo AFD , facciasi l'angolo FAD eguale al Δ , e si tirino le BT , EF perpendicolari alla stessa corda, indi si prenda l'orizzontale EG eguale alla EF , costruiscasi l'angolo EGH eguale al Γ , e pel punto H , ove il lato CH di quest'angolo sega la verticale EH , conducasi il diametro $PHBN$ del cerchio NAC : fatto ciò, lemma diciassettesimo, si descriva la porzione xE della periferia ellittica che passa pel punto E ed ha per asse NP , cioè la porzione di essa periferia intercetta fra il raggio AB e lo stesso punto E , e delineisi anche la parte ET dell'altra periferia pure ellittica, passante anch'essa per E , ed avente per un semiasse il raggio BT ed il centro in B , che il quadrilatero mistilineo $ATEx$ sarà l'ortografia dimandata.

Egli è facile a comprendersi, mediante la proposizione antecedente, che l'arco ET rappresenta l'ortografia dell'ombra portata sulla superficie sferica dell'arco circolare AT ; vera sarà pertanto la dichiarazione fatta, cioè che $ATEx$ sia l'ortografia dimandata, se l'altro arco ellittico xE esprimerà l'ortografia dell'ombra cagionata sulla stessa superficie sferica dalla periferia del suo cerchio massimo avente l'ortografia nella verticale AB .

Essendo la periferia del cerchio massimo della sfera, che ha l'ortografia nella verticale AB --, una delle due linee comuni alla stessa superficie sferica ed alla involvente che passa per la medesima periferia, e queste due superficie ambedue di second' ordine, l'altra linea comune ad esse sarà piana essa pure, *lemma tredicesimo*. Ma le linee piane tracciate su di una superficie sferica sono periferie circolari, e le periferie circolari che sono in una superficie cilindrica ordinaria, qual è l'attuale involvente, si uguagliano; adunque l'ultima delle anzidette linee comuni, per essere piana ed esistente sì nella superficie sferica che nella involvente, eguaglierà l'altra linea comune a queste superficie, e per conseguenza sarà anch' essa la periferia di un cerchio massimo della sfera come la prima; quindi la sua ortografia, cioè quella dell' ombra portata sulla superficie sferica dalla periferia del cerchio massimo che ha l'ortografia nella verticale AB --, risulterà essa pure una periferia ellittica, un asse della quale sarà un diametro del cerchio NAP .

S'immagini il semicerchio avente AD per diametro al di là dal piano ortografico e perpendicolare al medesimo, e suppongasì unito il punto A al segmento fatto alla periferia di questo semicerchio, od alla superficie sferica, dalla retta perpendicolare alla AD nel punto E : risultando l'angolo compreso dalla AD e dalla retta che unisce il punto A al segmento anzidetto eguale evidentemente all' FAD , quest'ultima retta sarà parallela ai raggi di luce; e conseguentemente, per essere A comune alla periferia CA ed a quella che ha l'ortografia nella verticale AB --, il segmento suddetto sarà comune ai contorni delle ombre portate sulla superficie sferica dalle stesse due periferie; quindi il punto E , rappresentando l'ortografia di questo segmento, apparterrà ad ambedue le periferie ellittiche xE , TE .

Similmente pel punto di contatto fra la periferia del cerchio massimo avente l'ortografia nella verticale AB -- e la sua tangente, che fa con questa verticale l'angolo eguale al Γ , si suppongano tirate due rette, l'una perpendicolare alla stessa verticale AB --, e l'altra pel punto B centro di detto cerchio: quest'ultima retta sarà la sezione dei piani delle due periferie, comuni sezioni alla superficie involvente e sferica, e l'angolo compreso da essa e dall'altra eguaglierà anch' esso il Γ .

Dalle cose qui esposte risulta adunque che il piano della periferia rappresentante il contorno dell' ombra portata da quella che ha l'ortografia nell' AB -- passa per quel punto della superficie sferica il quale ha E per ortografia, e che sega quello di quest'ultima circonferenza, lungo la retta condotta pel centro B e pel contatto anzidetto.

Ora pel medesimo segmento avente E per ortografia sia condotta la retta parallela a quest'ultima, essa giacerà interamente nel piano del contorno dell' ombra in quistione, e però incontrerà il piano ortografico in un punto della retta comune a questo piano ed a quello del contorno medesimo. Ma questa retta insieme alla suddetta perpendicolare alla AD tirata per E , e ad una parte della verticale EH costituiscono evidentemente un triangolo rettangolo in E , il quale ha il cateto orizzontale eguale alla EF , e l'angolo opposto al cateto verticale eguale a quello compreso dalle due rette supposte condotte, l'una al punto B , e l'altra perpendicolare alla stessa verticale, dal punto di contatto fra il cerchio massimo che ha l'ortografia nella AB --, e la sua tangente che fa con questa verticale l'angolo eguale al Γ ; adunque, per essere $EG = EF$, e l'angolo EGH eguale al medesimo Γ , sarà H il punto dove la parallela condotta pel suddetto segmento incontrerà il piano ortografico; quindi sarà $NBHP$ il diametro comune al cerchio NAP ed a quello dell' estremo dell' ombra, e conseguentemente l'asse maggiore della periferia ellittica rappresentante l'ortografia dell' ombra portata sulla superficie sferica dalla periferia di quel cerchio massimo di essa che ha l'ortografia nella verticale AB --; ciò che volevasi dimostrare.

OSSERVAZIONE 1. Egli è evidente che il termine x dell' arco ellittico xE è lo stesso piede della perpendicolare condotta superiormente alla verticale AB dal punto di contatto fra il cerchio avente l' ortografia nella stessa AB - - e la sua tangente che comprende con questa l' angolo eguale al Γ . Ma se il medesimo cerchio insieme a questa perpendicolare ed al raggio tirato dallo stesso punto di contatto si fa rotare attorno alla verticale AB , in modo che si disponga nel piano NAB , e sia in questa posizione la periferia rappresentata dalla ALN , la perpendicolare dalla Lx , e però il raggio dalla BL , si ha il triangolo BLx rettangolo in x , il cui angolo BLx eguaglia il Γ .

Adunque, facendo l' angolo LBx eguale al complemento del Γ e tirando Lx perpendicolare alla AB , si determinerà il punto x , dove la stessa AB verrà segata dall' arco ellittico xE , senza descriver questo.

OSSERVAZIONE 2. Essendo il piano che passa per AD , ed è perpendicolare all' ortografico, tangente la superficie involvente che ha per base il cerchio, la cui ortografia è la stessa AB - -, la retta AE sarà tangente l' ellisse NEP nello stesso punto E .

OSSERVAZIONE 3. Se i raggi di luce avranno la direzione che fissano generalmente i disegnatori, l' angolo EGH sarà semiretto, il punto D cadrà in C , ed ED risulterà un terzo, proposizione antepenultima, della corda AD , ora AC (fig. 62); o sia sarà

$$AC^2 = 2r^2, EC = \frac{1}{3} AC, AE = \frac{2}{3} AC; \text{ e però}$$

$$AE \cdot EC, \text{ od } \overline{EF}^2 \text{ eguaglierà } \frac{2}{9} \cdot AC^2 = \frac{4}{9} r^2, \text{ oppure}$$

EF ed anche EH eguale a $\frac{2}{3} r$. Ma EM eguaglia $\frac{1}{3} AB = \frac{1}{3} r$; adunque sarà $EH = 2 \cdot EM$.

Pertanto segata $CE = \frac{1}{3} AC$, tirata EM perpendicolare alla BC , e prolungata di $HM = EM$, e condotta la retta $NBHI$, si avrà in questa, senza alcun' altra operazione, l' asse maggiore dell' ortografia xVE .

Condotta $PQEX$ perpendicolare alla BI , e congiunta XB ; essendo $BM = \frac{2}{3} r = 2 \cdot HM$, ed i triangoli MBH , PQB , MQE simili, avrassi $BP = 2PQ$, $ME = 2MQ$; e però

$$QM = \frac{1}{2} ME = \frac{r}{6}, QE = \sqrt{(\overline{QM}^2 + \overline{EM}^2)} = \frac{r}{6} \sqrt{5},$$

$$BQ = BM - QM = \frac{r}{2}, PQ = BQ : \sqrt{5} = \frac{r}{2\sqrt{5}}, BP = \frac{r}{\sqrt{5}}; \text{ così}$$

$$PE = PQ + QE = \frac{4}{3} \frac{r}{\sqrt{5}}, \text{ e } PX = \sqrt{(\overline{BX}^2 - \overline{BP}^2)} = \frac{2r}{\sqrt{5}}. \text{ Quindi sarà}$$

$$PE : PX = \frac{4r}{3\sqrt{5}} : \frac{2r}{\sqrt{5}}, \text{ oppure } PE = \frac{2}{3} PX.$$

Ma il rapporto che ha l' ordinata PE dell' ellisse NEI alla corrispondente PX del cerchio NAI è eguale a quello che hanno due qualunque ordinate analoghe di queste due linee; adunque le ordinate della periferia ellittica NEI perpendicolari all' asse NI sono due terzi delle corrispondenti della periferia circolare NAI ; e però la stessa periferia ellittica descrivibile facilissimamente.

Così, tirata BT' parallela alla QE , sarà $ET' = EC$, per essere $BQ = QC$;

E però, segata $AT' = CE$ od eguale ad un terzo della AC , e congiunta BT' , indi presa $BV = \frac{2}{3} BC$, sarà BV l'asse minore dell'ellisse in questione. Similmente, fatto l'angolo LBx semiretto, e condotta Lx perpendicolare alla AB , otterrassi x termine superiore dell'arco ellittico xVE .

PROPOSIZIONE XIX.

Data la periferia dello spaccato ordinario di una superficie sferica e l'ortografia di una sua sezione od apertura orizzontale, trovare l'ortografia dell'ombra portata dalla circonferenza, lembo di questa sezione, sulla superficie stessa; ammesso che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria.

La periferia dello spaccato della superficie sferica sia ABF (fig. 63), che ha il centro in D , e l'ortografia e ad un tempo diametro dell'apertura sia la corda orizzontale AB .

Si unisca il punto E di mezzo della AB al D , seghisi DL eguale ad un terzo di ED , si tiri LM perpendicolare alla stessa DE ed eguale ad LE , si congiunga DM , ed a questa si conduca la perpendicolare nMm ; indi si prendano le nM , mM eguali entrambe alla AE , e le Mr , Ms eguali a due terzi della medesima AE , ed avransi nelle rette mn , rs i due assi della ellisse $rnsn$, che rappresenta l'ortografia dimandata.

La superficie involvente, avendo per base l'apertura, sarà di second'ordine come la sferica; e però, siccome la periferia della medesima apertura è una delle linee comuni a queste due superficie, l'altra loro comune sezione, cioè l'ombra di cui si tratta, risulterà piana anch'essa, *lemma tredicesimo*; e quindi sarà una circonferenza eguale al lembo della stessa apertura, trovandosi e nella superficie sferica e nell'involvente, la quale è in questo caso cilindrica ordinaria.

Essendo l'ombra una periferia circolare, la sua ortografia sarà in generale un'ellisse avente l'asse maggiore nell'ortografia di quel diametro della stessa periferia circolare, il quale è parallelo al piano ortografico, e per conseguenza sarà quest'asse eguale ad AB ; più il centro della medesima ellisse, al solito, si troverà nell'ortografia del centro della medesima periferia circolare.

S'immagini il piano lungo la retta che unisce il punto D al centro della periferia dell'ombra, ed è perpendicolare a quel diametro di questa periferia parallelo al piano ortografico; il medesimo piano in virtù di queste due proprietà risulterà perpendicolare all'ortografico medesimo, all'asse maggiore dell'ellisse dimandata, e passerà pel centro di questa; quindi l'asse maggiore della stessa ortografia richiesta sarà perpendicolare alla retta che unisce il suo centro al D , ed il minore cadrà in questa medesima retta.

Ora figurisi il cubo che ha una diagonale nella retta che congiunge E al centro dell'ombra, e due spigoli nelle EB , ED , e si comprenderà facilmente che la distanza dal centro dell'ombra alla DE è una diagonale della base inferiore di questo cubo, e che le distanze dall'ortografia del medesimo centro, o sia dal centro dell'ortografia dimandata, alle rette AB , DC sono lati del cubo stesso: e si supponga che il piano della detta diagonale di questo cubo e della verticale CD , col rotare attorno a questa, si disponga nell'ortografico insieme alla medesima diagonale del cubo, a quella della sua base inferiore e che ha un termine nella DE , e con esso loro quel diametro dell'ortografia il quale trovasi nello stesso piano rotante.

Rappresentando colla FG eguale alla AB questo diametro, dopo l'immaginata rotazione, le rette HE , HL tirate dal punto H di mezzo della FG , la prima al punto E , e l'altra perpendicolare alla ED , rappresenteranno le dette diagonali del cubo e della sua base; come EL esprimerà il lato del cubo medesimo che trovasi nella ED , ed attorno cui esso cubo ha rotato; quindi, per essere

$$\overline{LH}^2 = 2 \cdot \overline{EL}^2, \quad DH = DE, \quad \overline{DH}^2 = \overline{DL}^2 + \overline{LH}^2, \quad \text{si avrà}$$

$$\overline{DE}^2 = \overline{DL}^2 + 2 \cdot \overline{EL}^2.$$

Ma \overline{DE}^2 è anche eguale a $\overline{DL}^2 + 2DL \cdot LE + \overline{LE}^2$; adunque sarà

$$\overline{DL}^2 + 2DL \cdot LE + \overline{LE}^2 = \overline{DL}^2 + 2 \cdot \overline{EL}^2,$$

$$\text{o sia } 2DL \cdot LE = \overline{LE}^2, \quad \text{cioè } DL = \frac{1}{2} LE = \frac{1}{3} DE,$$

$$\text{ed } EL = \frac{2}{3} DE.$$

Pertanto, siccome il centro dell'ortografia dimandata si deve trovare nell'orizzontale LH , ed avere dalla verticale DE una distanza eguale al lato del cubo, cioè alla EL , esso centro si troverà in M , stante che si è fatto $LM = EL = \frac{2}{3} DE$, vale a dire eguale al lato del cubo stesso.

Così, essendo la retta che unisce il punto D al centro della periferia dell'ombra perpendicolare al piano di essa periferia, e quella che congiunge il centro della medesima al punto M perpendicolare al piano ortografico, l'angolo compreso da queste rette sarà eguale a quello che fa col piano ortografico quel diametro di essa periferia il quale ha per ortografia l'asse minore dell'ellisse dimandata: conseguentemente il rapporto geometrico fra l'asse minore ed il diametro della periferia dell'ombra eguaglierà quello del lato del cubo alla retta DE , o sia di LE alla DE . Ma quest'ultimo rapporto è eguale a due terzi; adunque l'asse minore della richiesta ortografia dovrà essere due terzi di AB .

Dalle cose esposte si raccoglie adunque che l'ortografia dimandata debb'essere la periferia ellittica che ha il centro in M , l'asse minore nella DM ed eguale a due terzi della AB , e l'asse maggiore eguale alla stessa AB , appunto come ho asserito nell'esposta determinazione della presente proposizione.

OSSERVAZIONE. Siano condotte le corde AA' , BB' del circolo ABF fra loro parallele, e tali che l'angolo BAA' sia semiretto, e per esse passino due piani perpendicolari all'ortografico: questi due piani, passando per le rette generatrici della superficie involvente che hanno le ortografie AA' , BB' , ed anche per le tangenti di queste superficie condotte pei punti A , B perpendicolarmente al piano ortografico, toccheranno tangenzialmente la medesima superficie involvente; e conseguentemente le loro tracce ortografiche, cioè le rette AA' , BB' , saranno tangenti l'ortografia medesima $nsmr$.

Essendo le tangenti A_1A' , B_2B' dell'ellisse $nsmr$ parallele fra loro, i contatti 1, 2 di esse con quest'ellisse saranno i due termini di un diametro della medesima; così, per essere i punti A , B comuni alla periferia ABF ed a quella dell'apertura, le ortografie dei punti della superficie sferica, nei quali cadono le ombre portate dai medesimi A , B , cioè i contatti 1, 2, si troveranno nell'ellisse rappresentante l'ortografia dell'ombra portata dalla ABA' , e nella stessa $nsmr$.

Quindi il diametro 12 della medesima ellisse nsm sarà anche una corda di quest'altra ortografia; e però i suoi termini, o sia i punti 1, 2, saranno

distanti dagli A' , B' di una terza parte delle corde AA' , BB' , proposizione quindicesima.

E conseguentemente questi punti saranno facilmente determinabili senza la descrizione dell'ellisse rns , ciò che sarà utile in molte occasioni.

Similmente, le rette AB , 12 , $A'B'$ concorrendo ad un punto distante di $\frac{1}{2} AA'$ da quello di mezzo della AA' stessa, e la distanza fra questa e l'1 essendo $\frac{1}{6} AA'$, sarà la tangente dell'angolo compreso dalla retta 12 e da quella tirata pel punto D perpendicolarmente alla AA' eguale $\frac{1}{6} AA'$ diviso per $\frac{1}{2} AA'$, cioè eguale ad $\frac{1}{3}$. Ma l'angolo che fa quest'ultima retta colla verticale ED è semiretto, e però la sua tangente eguale ad uno; adunque la tangente dell'angolo compreso dalle CD , 12 eguaglierà

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) : \left(1 + \frac{1}{3}\right), \text{ o sia } \frac{1}{2};$$

ciò che è singolare.

PROPOSIZIONE XX.

Data l'ortografia di una superficie sferica e quella di una sua sezione orizzontale, trovare l'ortografia dell'ombra che porta la periferia di questa sezione od apertura sulla superficie stessa, qualunque sia la direzione dei raggi di luce.

Il cerchio $ABEF$ (fig. 64) avente il centro in C sia l'ortografia della superficie sferica, e la retta AB sia quella della sua sezione orizzontale, ed il piano ortografico passi pel centro della sfera medesima.

Si faccia l'angolo FAB eguale al Σ , la corda FE alla AB , e la CD perpendicolare alla stessa AB ; pel punto G di mezzo della EF tirisi GH orizzontale, e si descriva l'arco circolare CP col centro H alla distanza GH ; indi si costruisca l'angolo GHP eguale a quello che fa l'icnografia della parallela ai raggi di luce col piano ortografico, e si tiri IP perpendicolare alla GH , congiungasi CIm , si seghi $CM = IP$ e conducasi MN parallela alla AC : in fine prendansi le It , Im eguali alla AN , e le In , Is eguali alla AD e perpendicolari alla CIm , e saranno tm , ns i due assi della periferia ellittica che rappresenta l'ortografia dimandata.

Che l'ombra debba essere una periferia circolare eguale a quella dell'apertura medesima, e la sua ortografia in generale un'ellisse avente l'asse maggiore eguale alla AB e perpendicolare alla retta che unisce il suo centro al C , si dimostra precisamente come nella proposizione precedente.

S'immagini per la CD il piano parallelo ai raggi di luce, e si segherà la linea dell'ombra, cioè l'ombra stessa, e l'apertura in due diametri, e si suppongano unite tanto le due estremità di questi diametri, le quali sono dalla stessa parte della retta che congiunge i punti di mezzo di essi, quanto le altre due; ed avransi due rette parallele ai raggi di luce, le quali coi diametri medesimi formeranno un trapezio eguale perfettamente all' $ABEF$.

Il trapezio, così costituito, col rotare attorno alla verticale CD , si adatti sul suo eguale $ABEF$; evidentemente il centro della periferia dell'ombra cadrà in G punto di mezzo della EF ; ma l'angolo descritto dal piano di questo trapezio per adattarsi a quello dell' $ABEF$ è lo stessissimo angolo compreso da essi piani, e però eguale al PHG ; adunque, se il triangolo GHP , rotando intorno alla HG , disporrassi nel piano orizzontale e da quella parte del piano ortografico ove si troverà il centro dell'ombra, l'arco GP coinciderà con quello descritto dal centro medesimo per passare in G ; quindi la retta IP eguaglierà la distanza fra il piano ortografico ed il centro della periferia dell'ombra, ed il punto I sarà l'ortografia del medesimo centro o sia dell'ortografia dimandata.

Ma la retta eguale a CD e che unisce C al centro dell'ombra è perpendicolare al piano di questa, e quella che congiunge il medesimo centro ad I , sua ortografia, lo è all'ortografico; sarà adunque, come nell'antecedente proposizione, CD ad IP geometricamente, come l'asse maggiore dell'ortografia, cioè AB , al minore, oppure come le loro metà; e conseguentemente essendo per costruzione

$$CD : CM \text{ ovvero } IP = AD : AN,$$

la retta AN eguaglierà il semiasse minore dell'ortografia dimandata.

Quindi, per essere le parti Im , It della Cm ambe eguali alla AN , e le IN , Is perpendicolari alla stessa Cm ed eguali alla AD , le rette tm , ns saranno i due assi della periferia ellittica $mnts$ rappresentante l'ortografia dimandata; ciò che ecc.

OSSERVAZIONE 1. Le rette AA' , BB' parallele alla O toccheranno l'ellisse $mnts$ nei termini di un diametro di essa, il quale sarà una corda dell'ortografia di cui si è parlato nella proposizione sedicesima;

E però descritte due semiperiferie circolari sulle AA' , BB' , e tirate pei punti A , B quelle corde di esse che fanno coi loro diametri AA' , BB' angoli eguali al Δ , e conducendo dai punti, ove queste ultime corde segano le stesse semiperiferie, le perpendicolari ai diametri medesimi AA' , BB' , nei piedi di queste avransi i punti delle rette AA' , BB' , dove esse medesime sono toccate dalla periferia ellittica $nmrs$; e tutto ciò si avrà senza descrivere questa periferia.

OSSERVAZIONE 2. Posto $CD = a$, $AD = r$, $CI = b$, $CDG = \alpha$, $GHP = \beta$, si ha

$$DG = 2a \cos. \alpha, DH = 2a \cos.^2 \alpha, GH = a \sin. 2\alpha,$$

$$CH = -a \cos. 2\alpha,$$

$$IH = a \sin. 2\alpha \cos. \beta, IP = a \sin. 2\alpha \sin. \beta, CI$$

$$\text{o sia } b = a\sqrt{(\cos.^2 2\alpha + \sin.^2 2\alpha \cos.^2 \beta)} = a\sqrt{(1 - \sin.^2 2\alpha \sin.^2 \beta)},$$

$$\text{ed } \overline{AC}^2 = a^2 + r^2, It = r \sin. 2\alpha \sin. \beta.$$

Così riferendo l'ellisse $mnts$ e la circonferenza ABF a coordinate ortogonali prese dal punto C , e che le ascisse siano nella Cm ; e chiamate x l'ascissa, ed y l'ordinata corrispondenti dell'ellisse, ed x_1 , y_1 le analoghe della periferia ABC , si hanno per equazioni di queste linee le seguenti:

$$\overline{It}^2 \cdot y^2 + \overline{In}^2 \cdot (x - b)^2 = \overline{It} \cdot \overline{In}^2, y_1^2 + x_1^2 = \overline{AC}^2,$$

le quali si riducono alle altre

$$y^2 \sin.^2 2\alpha \sin.^2 \beta + (x - b)^2 = r^2 \sin.^2 2\alpha \sin.^2 \beta,$$

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 + r^2,$$

sostituendo in esse per le rette It , $nI=AD$, AC i loro valori sopra trovati; e però nominata t l'ascissa, ed u l'ordinata comune a queste due linee, si avrà

$$u^2 \operatorname{sen}^2 2\alpha \operatorname{sen}^2 \beta + (t-b)^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 2\alpha \operatorname{sen}^2 \beta,$$

$$t^2 + u^2 = a^2 + r^2,$$

proprietà particolari delle coordinate t , u .

Eliminando l' u da queste ultime due equazioni, si ottiene la sola

$$(1 - \operatorname{sen}^2 2\alpha \operatorname{sen}^2 \beta) t^2 - 2bt + a^2 = 0,$$

$$\text{ovvero } b^2 t^2 - 2a^2 bt + a^4 = 0,$$

ponendo in vece di $1 - \operatorname{sen}^2 2\alpha \operatorname{sen}^2 \beta$ il suo valore $\frac{b^2}{a^2}$ desunto dall'equazione

$$b = a \sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 2\alpha \operatorname{sen}^2 \beta)}$$

esposta superiormente.

L'equazione $b^2 t^2 - 2a^2 bt + a^4 = 0$, o sia l'equivalente $(bt - a^2)^2 = 0$, dà $bt = a^2$; e però sarà

$$b : a = a : t, \text{ ovvero } CI : CD = CD : t,$$

cioè l'ascissa comune alle linee $mnts$, ABF debb'essere terza proporzionale geometrica dopo le due rette conosciute CI , CD ; quindi tirando per D la retta che fa colla DC , ed a destra di essa l'angolo eguale al DIC , essa segnerà una parte della Cm , la quale sarà la medesima ascissa t . Imperciocchè, nominato p il punto dove la Cm è segata dalla retta, così trovata, i triangoli DpC , DIC simili danno

$$CI : CD = CD : Cp, \text{ cioè } Cp = t$$

per la proporzione dianzi dimostrata.

Così, tirando pel termine p dell'ascissa qui determinata la perpendicolare alla medesima ascissa, ed estendendola da ambe le parti a segare la periferia ABF , si avranno in questi segmenti i punti comuni alle linee ABF , $mnts$, i quali saranno anche due punti di contatto di esse.

Sostituendo nell'equazione $t^2 + u^2 = a^2 + r^2$, in vece di t , il suo valore $\frac{a^2}{b}$,

o sia $a : \sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 2\alpha \operatorname{sen}^2 \beta)}$, e liberando la u , si ha, indicando colla R il raggio AC ,

$$u = \sqrt{\frac{r^2 - R^2 \operatorname{sen}^2 2\alpha \operatorname{sen}^2 \beta}{\cos^2 2\alpha + \operatorname{sen}^2 2\alpha \cos^2 \beta}},$$

$$\text{ovvero } u = \frac{1}{b} \sqrt{(a^2 r^2 - R^2 \cdot \overline{IP}^2)},$$

per essere $a^2 \operatorname{sen}^2 2\alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \overline{IP}^2$, ed $a \sqrt{(\cos^2 2\alpha + \operatorname{sen}^2 2\alpha \cos^2 \beta)} = b$.

Ma condotta DO perpendicolare al raggio AC , si hanno i triangoli simili ADC , ODC , che danno

$$AC : AD = CD : OD, \text{ o sia } R \cdot OD = ar; \text{ adunque sarà}$$

$$u = \frac{R}{b} \sqrt{(\overline{OD}^2 - \overline{IP}^2)}.$$

Questo valore della u insegna che le due linee $nmrs$, ABF toccheransi nei suddetti due punti, purchè sia OD maggiore di IP , e che i due punti di contatto si ridurranno ad un solo, e situato nel prolungamento della retta CI , allorchè sarà IP eguale alla OD ; in fine che l'ellisse cadrà interamente dentro del cerchio quando sarà OD minore della IP .

Se i raggi di luce saranno paralleli al piano ortografico, risulterà $IP=0$, e però l'ortografia ridurrassi alla semplice retta ns .

OSSERVAZIONE 3. Per avere l'icnografia dell'ombra che ho considerato in quest'ultima proposizione, supposta l'icnografia della medesima sfera espressa dal cerchio LQ (fig. 65) avente il centro in C ;

Si tiri la retta Cz parallela alla I , si seghi Ch eguale alla GH della figura antecedente, e le hz , hy eguali amendue alla Gx della medesima figura, e compresa fra C ed il piede x della Fx tirata dal punto F perpendicolarmente alla Hx , e si facciano le hw , hk perpendicolari alla stessa Cz ed eguali alla AD , ed avransi nelle kw , yz i due assi della periferia ellittica rappresentante l'icnografia dimandata.

Questa regola è un'immediata conseguenza di ciò che ho conchiuso dianzi per l'ortografia della medesima ombra.

Qualunque sia la direzione dei raggi di luce, evidentemente si ha $Gx = -r \cos. 2\alpha$ (fig. 64); adunque, per essere nell'ipotesi ordinaria $\cos. 2\alpha = -\frac{1}{3}$, sarà in tal caso

$Gx = \frac{1}{3}$, vale a dire l'asse minore dell'icnografia anzidetta un terzo dell'altro asse di essa.

OSSERVAZIONE 4. Se la retta $I-O$ sarà parallela al piano ortografico, la linea mns ridurrassi ad una retta eguale alla AB ; così se l'angolo Σ sarà semiretto, e la retta I perpendicolare al piano ortografico, la linea medesima mns risulterà la periferia del cerchio avente il centro in C ed il raggio eguale all' AD ; tutto questo è per sè stesso evidente.

PROPOSIZIONE XXI.

Data l'ortografia di una superficie sferica e quella d'una sua sezione piana qualunque, trovare l'ortografia dell'ombra che porta la periferia di questa sezione sulla medesima superficie.

La periferia circolare BUC (fig. 66) che ha il centro in A rappresenti l'ortografia e lo spaccato ordinario della sfera, e l'ellittica βaF avente il centro in D esprima l'ortografia della sezione.

Pel punto D centro della periferia ellittica βaF si tiri la retta BC parallela alla O , e su di essa si descriva il cerchio BMC , e dai termini del diametro EF della stessa ellisse βaF si tirino le EG , FH perpendicolari al medesimo, e dai punti ove queste segano la periferia MC conducansi le HL , GM fra loro parallele e che facciano colla BC l'angolo eguale al Δ , e congiungasi LM ; e dal punto N di mezzo di essa tirisi NP perpendicolare alla BC , uniscasi il punto P all' A , ed a questa conducasi la perpendicolare RPQ ; indi seghisi $PV=AP$, congiungasi VN , si ponga $NX=NL$, si tiri XZ perpendicolare alla NP ; e finalmente prendasi $PS=PT=NZ$, $PQ=PR=LN$, e saranno ST , RQ i due assi dell'ellisse che rappresenta l'ortografia richiesta.

L'ombra sarà la periferia di un circolo eguale alla sezione data, la sua ortografia un'ellisse che avrà il centro nell'ortografia di quello della medesima periferia, l'asse maggiore eguale al diametro della periferia stessa e perpendicolare alla retta che unirà il centro di essa ellisse a quello della sfera, ed il minore eguale alla quarta proporzionale geometrica, dopo la distanza fra il centro della sfera e quello dell'ombra, la perpendicolare tirata da questo centro al piano ortografico, e l'asse maggiore della stessa ortografia o sia diametro dell'ombra medesima.

Non dimostro queste verità, perchè non farei che ripetere ciò che ho detto nelle due proposizioni antecedenti, e passo in vece a mostrare che esse sono soddisfatte nella costruzione eseguita.

Disponendo il semicerchio BLC insieme a tutte le rette disegnate in esso sul suo diametro BC al di là e perpendicolarmente al piano ortografico, la retta GH coinciderà con un diametro della detta sezione, e le GM , HL colle rette condotte parallelamente ai raggi di luce pei termini di questo medesimo diametro; e però in questa situazione la retta LM si troverà in un diametro della periferia dell'ombra, ed il punto N nel centro di essa; quindi sarà NP eguale alla perpendicolare tirata da questo centro al piano ortografico, e P l'ortografia stessa del medesimo centro, ovvero centro dell'ellisse dimandata.

Essendo P il centro dell'ortografia richiesta, la retta RQ esprimerà il suo asse maggiore, per ciò che ho detto superiormente; così, per essere

$$\overline{VN}^2 = \overline{VP}^2 + \overline{PN}^2, \text{ o sia ad } \overline{AP}^2 + \overline{NP}^2,$$

VN eguaglierà la distanza fra il centro della periferia dell'ombra e quello della sfera; e però siccome si ha per costruzione

$$NV:NP = NX:NZ, \text{ o sia } NV:NP = PQ:NZ,$$

e si è fatto $PS = PT = NZ$, sarà ST l'asse minore dell'ellisse $QTRS$; vale a dire la periferia rappresentante l'ortografia dimandata avrà per assi le rette RQ , ST , come ho detto nella determinazione.

OSSERVAZIONE I. Se la sezione od apertura data, in vece di essere nell'emisfero posteriore al piano ortografico, come ho supposto tacitamente qui sopra, fosse nell'emisfero anteriore,

Si condurrebbero le rette EG' , FH' perpendicolari alla BC , e dai punti G' , H' due parallele alla stessa GM ; indi si procederebbe alla determinazione degli assi dell'ortografia dell'ombra precisamente, come ho praticato sopra.

Così se la medesima apertura sarà parte in uno dei due suddetti emisferi e parte nell'altro (fig. 67), cioè se l'ellisse $\alpha\beta F$ toccherà in due punti la periferia BUC ; ammesso $\alpha E\beta$ l'ortografia di quella parte dell'apertura, la quale è anteriore al cerchio BUC ,

Condurransi le EG , FH perpendicolari alla BC , le GM , HL parallele fra loro e facenti colla BC l'angolo Δ o sia quello compreso da questa e dai raggi di luce, e poscia si continuerà, come lo mostra l'ispezione della figura, quasi come sopra.

In ultimo, qualora il piano dell'apertura sia perpendicolare all'ortografico, ovvero sia l'ortografia di essa una corda del cerchio BUC ,

Condurrassi pel punto di mezzo di questa corda l'altra corda del medesimo cerchio BUC parallela alla O , e su di essa qual diametro si descriverà una semiperiferia circolare; indi si tirerà al diametro medesimo

la perpendicolare che passa pel punto comune ad esso ed alla corda ortografia data, e dai segmenti di questa perpendicolare colla periferia descritta condurransi le due rette fra loro parallele e che fanno col diametro di essa l'angolo eguale al Δ : fatto questo, si continuerà la determinazione della presente ortografia richiesta in un modo similissimo all'ultimo esposto.

Quando la BC passerà pel punto A , le rette AP , BC coincideranno; e però in tal caso l'asse maggiore RQ sarà perpendicolare alla medesima BC .

OSSERVAZIONE 2. Se il piano della periferia dell'ombra risulterà perpendicolare ovvero parallelo all'ortografico correlativamente, la linea $RSQT$ si ridurrà ad una retta ovvero ad una periferia circolare.

ALTRO METODO PER DESCRIVERE IN TUTTI I CASI L'ORTOGRAFIA
DI CUI SI PARLA NELL'ULTIMA PROPOSIZIONE.

Si conducano le rette ADB , EG , FH , HL , GM (fig. 68) come sopra, si tirino le LN , MP perpendicolari alla AB , e si avrà nella retta NP evidentemente un diametro dell'ortografia dimandata; indi si conduca RS parallela alla AB e tangente l'ellisse EQF , e su di essa descrivasi il semicerchio RVS , si tiri pel punto Q di contatto la QT perpendicolare alla RS , e TV parallela alla GM , VX perpendicolare alla RS , e sarà X il punto di contatto fra RS e l'ortografia richiesta; quindi congiunta X col punto O di mezzo della NP , si otterranno nelle rette XO , NO due semidiametri congiugati dell'icnografia stessa; e però sarà essa descrivibile facilissimamente col *lemma quattordicesimo*.

Di fatto, facendo passare per RS il piano perpendicolare all'ortografico, risulterà esso tangente la superficie involvente, e però la sua traccia RS tangente l'ellisse NPX . Ma rotando il semicerchio RVS attorno alla RS ed in modo che si disponga dietro al piano ortografico e perpendicolare al medesimo, il punto T passa nel punto di contatto fra il detto piano e la sezione data, la retta TV nella generatrice della medesima superficie involvente che passa per questo punto di contatto; adunque ecc.

PROPOSIZIONE XXII.

Data l'ortografia di una superficie sferica e quella di una sua apertura qualunque, determinare l'ortografia dell'ombra portata sulla superficie stessa dal lembo di questa sua apertura.

Il cerchio ABC (fig. 69), che ha il centro in E , sia l'ortografia, e nel medesimo tempo lo spaccato ordinario della superficie sferica, e la linea FNG sia l'ortografia del lembo dell'apertura della medesima superficie.

Pel punto F dell'ortografia FNG si tiri AC parallela alla O , si descriva sopra di essa il semicerchio $ALMC$, e la FL sua perpendicolare; tirisi LM , che faccia colla AC un angolo eguale al Δ ; conducasi Mf pel segmento M e perpendicolare alla stessa AC , che f rappresenterà l'ortografia del punto

della superficie sferica, nel quale cadrà l'ombra portata da quella del lembo dell'apertura, il quale ha l'ortografia in F : in un modo similissimo si avranno anche gli altri punti dell'ortografia dimandata.

Se il semicerchio ALC insieme alle rette FL , LM , Mf col rotare attorno al diametro AC si disporrà al di là e perpendicolarmente al piano del cerchio massimo ABC della sfera, in questa situazione L troverassi nel punto del contorno dell'apertura, che ha F per ortografia, e la retta LM nella parallela ai raggi di luce che passa pel medesimo punto; e però il punto M si troverà in quello della superficie, nel quale cadrà l'ombra portata dal punto stesso dell'apertura, il quale ha per ortografia F ; quindi essendo Mf perpendicolare alla AC diametro attorno cui ha rotato il semicerchio AMC , sarà f un punto della linea fng ortografia dimandata; come volevasi dimostrare.

OSSERVAZIONE 1. Se l'apertura sarà nell'emisfero anteriore al cerchio ABC massimo della sfera, ovvero parte in questo e parte nell'emisfero posteriore al medesimo cerchio massimo, si faranno alla regola qui esposta, per avere la linea fng , delle modificazioni simili a quelle che ho dichiarato nell'osservazione della proposizione antecedente per la regola colà esposta.

COROLLARIO. L'arco fn compreso fra le Ff , Nn parallele ambedue alla O rappresenterà l'ortografia dell'ombra portata sulla superficie sferica dalla porzione del contorno del foro dato, che ha l'ortografia nella parte NF della curva FNG compresa fra le parallele stesse Ff , Nn .

OSSERVAZIONE 2. Tutto quello che ho detto nelle ultime proposizioni relativamente alle ortografie, si estende, senza verun notabile cambiamento, anco alle corrispondenti icnografie.

PROPOSIZIONE XXIII.

Trovare l'ortografia e l'icnografia dell'ombra che porta una linea qualunque sopra una data sfera.

Siano ABC , abc (fig. 70) l'ortografia e l'icnografia della linea che porta l'ombra, ed i cerchi EN , sV aventi i centri in F , f siano le analoghe proiezioni della sfera.

Si conduca PF parallela all'asse ML : fatto ciò, da B punto qualunque della ABC si tiri BPb perpendicolare alla ML medesima, indi BR parallela alla I , bt alla O , bp perpendicolare alla bt ed eguale alla BP ; si tiri la pn che faccia colla bt l'angolo eguale al Δ , e dai punti h , n , ove essa sega la periferia circolare descritta sulla corda st qual diametro, tirinsi le hi , nr perpendicolari alla bt ; e poi si conducano le iI , rR perpendicolari alla ML , che i punti i , I ovvero r , R apparterranno evidentemente all'ortografia ed icnografia dimandate: saranno i due primi, se l'ombra cadrà sulla convessità della sfera, ed i due altri, se essa cadrà nella concavità.

Facendo fare al trapezio $bpnr$ ed al cerchio sht un quarto di rotazione attorno a $PF - br$ per cui esso passi innanzi a questa retta, il suo lato pn si confonderà colla $BR - br$ parallela ai raggi di luce, il cerchio sht col circolo della sfera, il quale è perpendicolare al piano ortografico, e di cui un diametro ha per ortografia st ; e però il punto della superficie sferica, nel quale cadrà l'ombra portata dal $B - b$ della linea $ABC - abc$ obbiettiva, sarà quello in cui trovasi ora h , ovvero l'altro nel quale sarà passato l' n ; quindi ecc.

OSSERVAZIONE. Se la linea $ABC - abc$ fosse retta, l'ortografia e l'icnografia in quistione in generale sarebbero ellissi, e però si potrebbero descrivere anco col *lemma quattordicesimo*, determinando primieramente due diametri conjugati di esse; ma siccome la sfera è una superficie di rotazione e dell'ombra portata da una retta su queste altre superficie, di cui parlerò estesamente altrove; così ometto per ora qualunque sviluppo relativo a questo caso particolare, benchè frequentissimo in pratica.

DE' CONTORNI

DELLE OMBRE PORTATE SULLE SUPERFICIE DI UN' ELLISSOIDE QUALUNQUE,
DI UNA PARABOLOIDE ELLITTICA E DI UN' IPERBOLOIDE A DUE FOGLIE.

PROPOSIZIONE XXIV.

Ammesse le tre superficie collocate e conosciute come nella proposizione quarta della parte antecedente, trovare l'ortografia dell'ombra portata dalla prima sezione sopra di esse superficie.

Sia AVB (fig. 71) l'ortografia della superficie ed anche la sua prima sezione, cioè quella parallela al piano ortografico.

Nella soluzione di questa proposizione seguirò l'ordine stesso che tenni nell'anzi citata, colla quale la presente ha molti rapporti, cioè comincerò a soddisfarla pel caso che la retta DE parallela alla O segghi la linea AVB in due punti; indi nel caso individuato che quest'ultima retta o la stessa O sia parallela nella paraboloida all'asse e nell'iperboloida ad uno degli asintoti dell'ortografia AVB ; in ultimo soddisfarò la medesima proposizione pel caso che ha luogo nella sola iperboloida, vale a dire allorchè la parallela alla O tirata pel centro della AVB attraversi l'angolo compreso dagli asintoti della medesima ortografia; ciò che non accade quando abbiano luogo i due casi precedenti.

PRIMO CASO.

Si tiri la corda DE dell'ortografia parallelamente alla O , si faccia l'angolo QDE eguale al Δ , determinisi l'ascissa Dd corrispondente al punto dove la retta DQ segherebbe, *lemma quindicesimo*, la periferia ellittica avente DE per uno degli assi, e di cui si conosce l'ordinata corrispondente al punto comune alle DE, VT ; indi si tirino altre corde HL , -- parallele anch'esse alla O , e si seghino le loro parti Hh , -- rispettivamente proporzionali alle stesse corde HL , --, come Dd lo è alla DE , che i punti h , -- apparterranno all'ortografia dimandata.

Le sezioni fatte alla superficie dai piani perpendicolari all'ortografico e che passano per le rette DE, HL , -- saranno altrettante periferie ellittiche e simili fra loro, *lemmi quarto ed ottavo*.

Conducendo pei punti D, H , -- le parallele ai raggi di luce, e dai nuovi segmenti di esse colla superficie le perpendicolari al piano ortografico, avransi nei piedi di queste

perpendicolari i punti delle rette DE , HL , -- comuni all' ortografia dimandata; e però siccome queste parallele ai raggi di luce fanno colle DE , HL , -- degli angoli eguali, e le sezioni ellittiche suddette sono simili, saranno le parti degli assi DE , HL , -- intercette fra i loro termini D , H , -- e l' ortografia richiesta rispettivamente proporzionali ai medesimi, *lemma diciassettesimo*.

Ma se la semiperiferia ellittica che ha per asse DE e che rappresenta una delle dette sezioni, col rotare attorno al suo asse DE si adatti al piano ortografico insieme alla parallela ai raggi di luce ed alla perpendicolare alla stessa DE , che trovansi amendue nel piano di essa sezione, e si rappresenti questa semiperiferia ellittica colla DQE , egli è evidente che la parallela ai raggi di luce cadrà nella DQ , e la perpendicolare alla DE nella Qd , per cui il punto d della corda DE , determinato sopra, sarà quello comune ad essa corda ed all' ortografia in quistione; adunque il rapporto che debbono avere le parti anzidette delle corde DE , HL , -- alle corde stesse dovrà essere quello della Dd alla DE .

Quindi per essersi fatte le parti Dd , Hh , -- delle corde DE , HL , -- rispettivamente proporzionali ad esse corde medesime, i punti d , h , -- costituiranno veramente l' ortografia dimandata.

COROLLARIO 1. Congiunti i punti M , N di mezzo delle corde HL , DE , si ha il diametro Pp dell' ortografia data, il quale sega la medesima nel punto P comune e di contatto fra questa e l' ortografia richiesta.

COROLLARIO 2. Nell' ellisse (fig. 72) e nell' iperbola (fig. 73) essendo

$$\overline{ML}^2 : \overline{NE}^2 = MP \cdot Mp : PN \cdot Np,$$

e nella parabola (fig. 71)

$$\overline{ML}^2 : \overline{NE}^2 = PM : PN,$$

e per quello che si è dimostrato

$$\overline{ML}^2 : \overline{NE}^2 = \overline{Mh}^2 : \overline{Nd}^2,$$

si avrà per le prime due di queste linee

$$\overline{Mh}^2 : \overline{Nd}^2 = MP \cdot Mp : PN \cdot NP,$$

e per l' altra

$$\overline{Mh}^2 : \overline{Nd}^2 = MP : NP;$$

vale a dire l' ortografia descritta sopra sarà un' ellisse nell' ellissoide, un' iperbola nell' iperboloide, ed una parabola nella paraboloide, ed avrà coll' ortografia della data superficie comune il diametro Pp : proprietà dimostrabili facilmente anche col semplice *lemma tredicesimo*. Questo diametro comune diverrà un asse delle medesime linee quando la tangente in P all' ortografia AVB sarà orizzontale.

COROLLARIO 3. Nell' ellissoide e nell' iperboloide, rappresentando colle AB , $f'f$ i diametri delle ortografie AVB , $d'Pd$ e conjugati al comune Pp , si avrà

$$\overline{CP}^2 : PM \cdot Mp = \overline{CB}^2 : \overline{ML}^2, \quad \overline{CP}^2 : PM \cdot Mp = \overline{Cf}^2 : \overline{Mh}^2, \quad \text{e però}$$

$$\overline{CB}^2 : \overline{ML}^2 = \overline{Cf}^2 : \overline{Mh}^2, \quad \text{o sia } CB : ML = Cf : Mh,$$

cioè i semidiametri conjugati CB , Cf sono geometricamente proporzionali alle ordinate ML , Mh corrispondenti ad una medesima ascissa, siccome era facile a prevedersi.

Così, nominato P il parametro della parabola (fig. 71) AVB , e p quello della $d'Pd$, si hanno le equazioni

$$\overline{ML}^2 = P \cdot MP, \quad \overline{Mh}^2 = p \cdot MP,$$

le quali danno

$$\overline{ML}^2 : \overline{Mh}^2 = P : p,$$

cioè i parametri delle parabole AVB , $d'Pd$ come i quadrati delle loro ordinate corrispondenti alle medesime ascisse; come ecc.

OSSERVAZIONE. L'ombra di cui si è parlato qui sopra sarà Phd (fig. 71) ovvero $Ph'd$, od anche la stessa retta PN , secondo che la retta Dd risulterà maggiore o minore, oppure eguale alla metà della DE .

SECONDO CASO.

Primieramente sia AVB (fig. 74) l'ortografia della paraboloides.

Si tirino le rette DE , HL , -- parallele alla O , o sia alla VT asse della parabola AVB , si faccia l'angolo mVT eguale al Γ , si trovi l'ascissa Vv , osservazione del *lemma sedicesimo*, che corrisponde al segmento della Vm colla parabola Vmn , seconda sezione avente l'asse anch'essa nella VT , il vertice in V , e che passa pel punto n , a cui suppongo corrispondente un'ordinata conosciuta; indi si seghino Dd , Hh , -- eguali alla Vv , e si avrà nella dvh l'ortografia dimandata.

Se dai punti della paraboloides, dove è incontrata di nuovo dalle parallele ai raggi di luce che passano per gli H , V , D , --, si tirino le perpendicolari al piano ortografico, i loro piedi saranno punti delle rette DE , VT , HL , -- equidistanti dai D , V , H , --, per essere le sezioni fatte alla medesima superficie dai piani passanti lungo le stesse DE , VT , HL , -- e perpendicolari all'ortografico altrettante parabole eguali fra loro, *lemma sesto*.

Ma i piedi di queste perpendicolari sono gli stessissimi punti dell'ortografia dimandata, e la Vv è evidentemente una delle suddette distanze; adunque dvh sarà l'ortografia medesima.

OSSERVAZIONE. Essendo le rette Dd , Vv , Hh , -- parallele ed eguali, la linea dvh sarà una parabola eguale perfettamente alla stessa data DVH , e però descrivibile con facilità.

In secondo luogo sia AVB (fig. 75) l'ortografia dell'iperboloide o la sua prima sezione, ed XY , XZ siano gli asintoti di essa.

Nell'iperboloide, se la retta Dm sarà parallela ad uno degli asintoti XZ , XY , per esempio all' XY , le sezioni che fanno i piani perpendicolari all'ortografico e che passano lungo le Hh , Dd , -- parallele alla O , saranno parabole che avranno i vertici nei punti H , D , -- e gli assi nelle rette Hh , Dd , --, ed i parametri proporzionali alle Xa , Xb , --, *lemma quinto*. Ma le distanze fra i punti H , D , -- a quelli dell'ortografia dimandata che trovansi nelle rette Hh , Dd , -- sono proporzionali ai parametri delle stesse parabole, *lemma diciannovesimo*; adunque anche alle rette Xa , Xb , --, *lemma quinto*; e però trovata una delle rette Hh , Dd , --, *lemma sedicesimo*, si procederà alla determinazione dell'ortografia in quistione, come nel caso analogo della proposizione quarta della seconda parte.

TERZO CASO.

Se la retta DE (fig. 75) parallela alla O non segherà l'iperbola AVB in due punti, nè sarà parallela ad uno degli asintoti di essa, o sia se la parallela alla O tirata per X centro dell'iperbola attraverserà l'angolo ZXY de' suoi asintoti, le sezioni dell'iperboloide fatte dai piani perpendicolari all'ortografico e condotti lungo le rette Hh , Dd , -- saranno tutte iperbole simili, *lemma settimo*; e però le ascisse prese dai punti H , D , -- e nelle rette Hh , Dd , -- corrispondenti ai segmenti delle stesse iperbole colle parallele

ai raggi di luce tirate pei punti medesimi H, D , - - saranno proporzionali ai diametri analoghi delle stesse iperbole, osservazione del *lemma diciassettesimo*: conseguentemente determinata una di queste ascisse, *lemma ventesimo*, avransi tutti i punti dell'iperbola richiesta in un modo affatto simile a quello usato nel caso primo di questa medesima proposizione.

PROPOSIZIONE XXV.

Ammesso il dato della proposizione antecedente, trovare l'ortografia dell'ombra portata sulla superficie di second'ordine dalla seconda sezione di essa, cioè dalla sezione principale che è perpendicolare al piano ortografico.

Sebbene si potrebbe soddisfare la presente proposizione senza distinguere le tre differenti superficie contemplate in essa, come ho fatto nel primo caso dell'antecedente proposizione; nulladimeno, onde procacciarle la maggior chiarezza, la soddisfarò separatamente per ciascuna delle medesime superficie, ed incomincerò

DALL' ELLISSOIDE.

Sia VR (fig. 76) la seconda sezione dell'ellissoide adattatasi al piano ortografico o della prima sezione $YVCX$ con un quarto di rotazione fatto attorno al suo asse od ortografia VX . La linea VR non fa bisogno che sia effettivamente disegnata, come lo debb'essere $YVCX$; giacchè non serve ad altro che a facilitare l'enunciato della regola e la sua dimostrazione.

Si tiri VC parallela alla O , si faccia l'angolo CVP eguale al Δ , si trovino le coordinate Vm, mP analoghe alle Dd, dQ del primo caso della precedente proposizione, conducasi l'orizzontale $mD = mP$, e la verticale mE indefinita, e la DE parallela al diametro BR della seconda sezione avente un termine nel punto R di contatto fra la stessa VR , sezione seconda, e la retta Rv sua tangente, che fa colla verticale Bv l'angolo RvB eguale al Γ , *lemma decimo*; indi uniscasi $EFBY$, e si tirino le HmG, QnN , - - parallele alla FT tangente la prima sezione in F , e si seghino in n , - - tutte, come lo è GH in m , che i punti n , - -, così determinati, saranno nell'ortografia dimandata.

La seconda sezione, cioè quella che ha l'ortografia nella retta VBX , essendo una delle due linee comuni alla superficie involvente ed all'ellissoide, l'altra linea comune a queste superficie, ambedue di second'ordine, sarà piana, come lo è la seconda sezione medesima, *lemma tredicesimo*; e però la linea dell'ombra sarà un'ellisse avente di comune col $VCCY$ il centro B , ed il diametro esistente nella comune sezione del piano dell'ombra medesima e dell'ortografico; quindi anche la richiesta ortografia sarà una periferia ellittica, la quale avrà di comune colla $VCCY$ il centro, un diametro e due punti di contatto ai termini di questo medesimo diametro.

Si facciano rotare i due triangoli DmE, BRv intorno alle verticali mE, vB in guisa che si dispongano di dietro e perpendicolari al piano ortografico: in questa novella posizione i punti D ed R saranno nel piano della linea dell'ombra, le rette DE, RB fra loro parallele; più la BR sarà nella comune intersecazione del medesimo piano dell'ombra

e del piano della seconda sezione. In questa nuova posizione, essendo tanto la retta BR , quanto il punto D della sua parallela DE nel piano della linea dell'ombra, il punto E della DE sarà anch'esso nel medesimo piano; e perciò la retta FEB , la quale ha i due punti B, E in quest'ultimo piano e nell'ortografico, rappresenterà la loro comune sezione; e pertanto YBF porzione di quest'ultima retta esprimerà il diametro comune alla prima sezione $VCXY$ ed all'ortografia richiesta.

Così, per essere m l'ortografia del punto dell'ellissoide, nel quale cade l'ombra portata dal V della seconda sezione, sarà esso un punto della medesima periferia ellittica dimandata.

Risulta adunque che l'ortografia in quistione debb'essere l'ellisse avente il centro in B , un diametro nella YBF , i punti di contatto colla $VCXY$ in F ed Y , e che deve passare pel punto m ora conosciuto. Ma il paralellismo delle rette QV, HG , -- colla tangente FT dell'ellisse $VCXY$, e le proporzionalità di esse colle loro parti rispettive nQ, mH , -- danno le proporzioni geometriche

$$\overline{NQ}^2 : \overline{GH}^2 = YQ \cdot QF : YH \cdot HF,$$

$$\overline{NQ}^2 : \overline{GH}^2 = \overline{nQ}^2 : \overline{mH}^2,$$

da cui si deduce la seguente

$$\overline{nQ}^2 : \overline{mH}^2 = YQ \cdot QF : YH \cdot HF,$$

la quale esprime evidentemente che i punti n, m , -- sono nella periferia ellittica anzidetta, e per conseguenza nell'ortografia dimandata; ciò che ecc.

OSSERVAZIONE 1. Si supponga che il triangolo RvB ruoti attorno alla verticale vB , come si è detto superiormente, e che con esso ruoti anche la retta RI perpendicolare alla stessa verticale Bv ; egli è evidente che la nuova situazione della RI sarà la perpendicolare al piano ortografico tirata dal segmento fra la linea dell'ombra ed il piano che ha l'ortografia nella BV ; quindi il suo piede I sarà il segmento stesso della retta VX e dell'ortografia di cui si parla.

Pertanto, trovato il punto di contatto R , lemma decimo, fra la retta Rv facente l'angolo RvB eguale al Γ , e l'ellisse RV di cui si conoscono almeno i due assi; e condotta poscia da questo punto la RI perpendicolare alla verticale BV , nel piede di essa si otterrà il segmento della stessa verticale BV e dell'ortografia YIm , senza descrivere quest'ultima.

OSSERVAZIONE 2. Se la porzione dell'ellissoide sarà la sola ottava parte che ha per ortografia il quadrante ellittico VBS , e che trovasi di là dal piano della prima sezione, l'ortografia dell'ombra portata sulla medesima superficie da tutti i lati del suo lembo verrà rappresentata dal quadrilatero mistilineo avente per lati la retta VI , l'arco ellittico Im descritto poc'anzi, la porzione Vx del dato compreso fra V ed il punto di contatto di VC stesso, e la retta parallela alla O , ed il quarto sarà l'arco xm pure ellittico che rappresenta l'ortografia dell'ombra portata dallo stesso Vx , e descritto nel primo caso della proposizione precedente; così se i raggi di luce saranno paralleli al piano ortografico, l'ombra cagionata dalla seconda sezione sarà il diametro dell'ellisse $YVCX$, che ha un termine nel punto C .

DELLA PARABOLOIDE ELLITTICA.

Le curve AVB, VR (fig. 77) rappresentino per questa superficie delle linee analoghe alle egualmente denominate per la superficie dell'ellissoide.

Conducasi VC , e si trovino Vm, mP , come si è fatto qui sopra; si determini, lemma undecimo, IR ordinata del punto di contatto fra la parabola

VR e la retta Rv sua toccante, che comprende colla Vt l'angolo RvT eguale al Γ ; si prendano nelle verticali mQ' , VIT le parti $Q'S$, TK eguali rispettivamente alle mP , IR ; si uniscano le $Q'TZ$, SKZ , e da Z segmento tirisi la FZ verticale; indi si tirino le HmG , QN , -- parallele alla tF tangente in F alla YAX , e si seghino le loro parti Qn , -- che siano alle stesse QN , -- geometricamente, come GH è alla sua parte mH determinata, ed avransi nei segmenti m , n , -- altrettanti punti dell'ortografia dimandata.

La linea dell'ombra debb'essere una parabola conica che ha i diametri verticali e situata nella paraboloide; la sua ortografia sarà adunque anch'essa una parabola conica avente i diametri verticali, un punto di contatto colla data AVB , e comune con questa il diametro che ha il termine in questo medesimo punto di contatto, e situata nella sezione comune del piano dell'ombra medesima e dell'ortografia.

Ma se il triangolo ZSQ' col rotare intorno alla ZQ' si dispone di dietro e perpendicolarmente all'ortografico, i punti S , K passano nel piano dell'ombra, per essere $Q'S = mP$, $TK = IR$; adunque il punto Z , comune alla SZ ed al piano ortografico anche in questa nuova posizione, apparterrà alla comune intersecazione dei due piani suddetti; e però la verticale FZH sarà il diametro comune alla parabola AVB ed all'ortografia richiesta.

Così, per essere

$$\overline{QN}^2 : QF = \overline{GH}^2 : FH = \text{ecc.}$$

in virtù del parallellismo delle rette Ft , NQ , GH , --, e per costruzione

$$QN : Qn = GH : mH = \text{ecc.},$$

si avrà anco

$$\overline{Qn}^2 : QF = \overline{Hm}^2 : FH = \text{ecc.};$$

ma il punto m appartiene evidentemente all'ortografia dimandata, come ortografia del punto nel quale cade l'ombra che porta il V ; adunque i punti n , m , --, determinati superiormente, sono veramente nell'ortografia dimandata; come ho asserito.

COROLLARIO. Il punto I sarà, come nell'ellissoide, un punto dell'arco parabolico che rappresenta l'ortografia dell'ombra in quistione.

OSSERVAZIONE. Se i raggi di luce fossero paralleli al piano ortografico, il punto F cadrebbe nel C , e l'ortografia dimandata sarebbe la retta verticale CU ; così se la porzione della paraboloide sarà la sola avente l'angolo BVT per ortografia, e collocata di dietro alla prima sezione, l'intera ortografia dell'ombra portata dal suo lembo sarà il semplice quadrilatero $VxmI$, che ha il lato VI rettilineo, e gli altri tre Im , mx , Vx parabolici, x esprimendo il punto di contatto fra la parabola VxB e la sua tangente parallela alla O , ed mx l'ortografia dell'ombra portata dallo stesso arco Vx .

DELL'IPERBOLOIDE A DUE FOGLIE.

Sia AVB (fig. 78) l'ortografia dell'iperboloide o sia la sua prima sezione, e la retta verticale VT sia al solito quella della seconda sezione o sia la linea che cagiona l'ombra in quistione.

Si trovi il semiasse CV dell'iperbola AVB , tirinsi le VL , EF , GB parallele alla O , si determini il punto i della prima di queste rette in cui

cade l'ortografia dell'ombra portata dal punto V , *lemmi quindicesimo, sedicesimo e ventesimo*, e l' m di un'altra qualunque, e nel quale cade l'ortografia dell'ombra portata da quello della seconda sezione, il quale ha l'ortografia in c , corollario primo del *lemma vigesimosesto*; congiungasi iC , e dai segmenti a, b , -- del prolungamento di questa retta colle EF, GB , -- si tirino le ar, bs , -- tangenti il circolo irs , -- descritto col centro C alla distanza Ci : fatto ciò, trovinsi bn , -- che siano alle corrispondenti tangenti bs , -- geometricamente, come l' am è alla tangente ar , e saranno n , -- altrettanti punti dell'ortografia dimandata.

Onde facilitare la dimostrazione di questa proposizione suppongo disegnata l'iperbola $A'B'$ opposta della AB , cioè l'ortografia dell'altra foglia dell'iperboloide, di cui intendo di parlare; e faccio osservare che le sezioni principali delle due foglie di queste superficie, le quali hanno le ortografie nelle verticali $VT, T'V'$, sono anch'esse due iperbole opposte aventi il centro nel punto C , siccome è facile a concepirsi.

Immagino la superficie cilindrica che ha per direttrice queste ultime due iperbole opposte e la retta generatrice parallela ai raggi di luce: questa superficie di second'ordine avendo di comune coll'iperboloide le medesime due iperbole opposte anzidette, le intersecherà nuovamente in una linea piana anch'essa, *lemma tredicesimo*, e propriamente in due iperbole esse pure fra loro opposte, le quali avranno il centro necessariamente in C .

Ora egli è evidente che la superficie cilindrica a due foglie, che ho qui immaginato, è in questo caso la stessissima involvente; adunque l'ombra sarà una delle ultime iperbole nominate; e conseguentemente la sua ortografia o sia la dimandata risulterà essa pure un'iperbola conica avente il centro in C ; ma l'ortografia dimandata deve passare pei due punti i ed m , ed avere la VL tangente; quindi sarà essa quell'iperbola di cui Ci esprime un diametro, ed am l'ordinata corrispondente all'ascissa Ca .

Essendo

$$\overline{ar}^2 = ia(aC + Ci), \overline{bs}^2 = ib(bC + Ci), \text{ -- , e per l'iperbola} \\ ia(aC + Ci) : \overline{am}^2 = ib(bC + Ci) : y^2;$$

y indicando la sua ordinata corrispondente all'ascissa bC , sarà

$$\overline{ar}^2 : \overline{am}^2 = \overline{bs}^2 : y^2, \text{ o sia } ar : am = bs : y;$$

e però y eguale alla bn , vale a dire il punto x appartiene all'iperbola che rappresenta la richiesta ortografia; ciò che ecc.

OSSERVAZIONE 1. L'ortografia dell'ombra di cui si parla sarà la stessa retta ib che passa pel punto C e per l' i determinato come sopra, quando i raggi di luce saranno paralleli al piano ortografico.

OSSERVAZIONE 2. Dal punto C siano tirate tre rette fra loro perpendicolari, cioè la verticale CV , l'orizzontale CO , e la perpendicolare a queste due e cadente di là dal piano della prima sezione; ed a queste rette prese per assi siano riferite le coordinate z, y, x di un punto qualunque dell'iperboloide, e si avrà per equazione di questa superficie la seguente

$$a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2;$$

a, b, c rappresentano i semiassi della medesima superficie paralleli rispettivamente alle coordinate x, y, z .

Così denominate y', z' le coordinate di un punto qualunque della seconda sezione, sarà $c^2 y'^2 = b^2 z'^2 - b^2 c^2$ la sua equazione. Similmente, nominate m, n le tangenti degli angoli che fanno le I, O colla retta comune ai piani ortografico ed icnografico, e t, s, u le coordinate della parallela ai raggi di luce che passa pel punto corrispondente alle y', z' ed analoghe alle x, y, z , le due equazioni $s = mt + y', u = nt + z'$ rappresenteranno la retta medesima.

Ponendo nell'equazione $c^2 y'^2 = b^2 z'^2 - b^2 c^2$, in vece delle coordinate y', z' , i loro valori desunti dalle due equazioni $s = mt + y', u = nt + z'$, si ottiene la

$$c^2 (s - mt)^2 = b^2 \{ (u - nt)^2 - c^2 \}, \text{ o sia}$$

$$b^2 u^2 - c^2 s^2 + (b^2 n^2 - c^2 m^2) t^2 - 2nb^2 tu + 2mc^2 ts - b^2 c^2 = 0,$$

la quale esprime evidentemente la superficie involvente, per essere $s = mt + y', u = nt + z'$ le equazioni di una sua retta generatrice, e la $c^2 y'^2 = b^2 z'^2 - b^2 c^2$ quella di una sua direttrice.

Essendo

$$a^2 b^2 z^2 - a^2 c^2 y^2 - b^2 c^2 x^2 = a^2 b^2 c^2$$

l'equazione dell'iperboloide, e

$$b^2 u^2 - c^2 s^2 + (b^2 n^2 - c^2 m^2) t^2 - 2nb^2 tu + 2mc^2 ts - b^2 c^2 = 0$$

quella della involvente, le equazioni, le quali rappresenteranno le linee comuni alle medesime due superficie, saranno

$$a^2 b^2 z^2 - a^2 c^2 y^2 - b^2 c^2 x^2 = a^2 b^2 c^2 = 0,$$

$$b^2 z^2 - c^2 s^2 + (b^2 n^2 - c^2 m^2) t^2 - 2nb^2 tu + 2mc^2 ts - b^2 c^2 = 0:$$

x, y, z esprimono in esse le coordinate di un punto qualunque di queste linee, supposte riferite anch'esse ai tre assi ortogonali suddetti.

Ma moltiplicando i membri della seconda di queste equazioni per a^2 , e sottraendo la risultante dalla prima, si ottiene

$$(a^2 c^2 m^2 - a^2 b^2 n^2 - b^2 c^2) x^2 + 2a^2 b^2 nxz - 2a^2 c^2 mxy = 0, \text{ cioè}$$

$$\text{od } x = 0, \text{ ovvero } (a^2 c^2 m^2 - a^2 b^2 n^2 - b^2 c^2) x + 2a^2 b^2 nz - 2a^2 c^2 my = 0;$$

adunque una delle due intersezioni delle dette superficie sarà espressa dalle equazioni

$$x = 0, a^2 b^2 z^2 - a^2 c^2 y^2 - b^2 c^2 x^2 - a^2 b^2 c^2 = 0,$$

e l'altra dalle seguenti

$$(a^2 c^2 m^2 - a^2 b^2 n^2 - b^2 c^2) x + 2a^2 b^2 nz - 2a^2 c^2 my = 0,$$

$$a^2 b^2 z^2 - a^2 c^2 y^2 - b^2 c^2 x^2 - a^2 b^2 c^2 = 0.$$

La prima di queste due linee avendo per una delle sue equazioni la $x = 0$, sarà la seconda sezione; e però l'altra, cioè quella espressa dalle ultime due equazioni, sarà la linea, secondo la quale cade l'ombra di cui si è parlato sopra.

Supponendo $y = 0$ nelle due equazioni della linea dell'ombra, ed eliminando dalla risultante la z , si ottiene la sola

$$\{ (a^2 b^2 n^2 + b^2 c^2 - a^2 c^2 m^2)^2 - 4a^2 b^4 c^2 n^2 \} x^2 = 4a^4 b^4 c^2 n^2,$$

la quale dà

$$x = 2a^2 b^2 cn : \sqrt{\{ (a^2 b^2 n^2 + b^2 c^2 - a^2 c^2 m^2)^2 - 4a^2 b^4 c^2 n^2 \}}$$

per ascissa corrispondente al punto dove la traccia ortografica del piano della linea dell'ombra sega l'ortografia data AVB , o sia l'ascissa che corrisponde al punto di contatto fra quest'ultima ortografia e la dimandata.

Questo valore della x sarà reale tutte le volte che $(a^2b^2n^2 + b^2c^2 - a^2c^2m^2)^3$ risulterà maggiore di $4b^4a^2c^2n^2$, o sia $a^2b^2n^2 + b^2c^2 - a^2c^2m^2$ di $2ab^2cn$, ovvero $a^2b^2n^2 - 2ab^2cn + b^2c^2$ di $a^2c^2m^2$; cioè $\pm b(an - c)$ maggiore di acm , oppure $\pm \frac{an - c}{am}$ maggiore di $\frac{c}{b}$: si prenderà il segno $+$ quando an sarà maggiore di c , ed il $-$ nel caso di an minore del medesimo c . Lo stesso valore della x risulterà infinito nel caso di $\pm \frac{an - c}{am}$ eguale a $\frac{c}{b}$, ed immaginario quando sarà $\pm \frac{an - c}{am}$ assolutamente minore di $\frac{c}{b}$. Adunque l'ortografia dimandata avrà un punto di contatto colla AVB allorchè sarà $\pm \frac{an - c}{am}$ maggiore di $\frac{c}{b}$, un asintoto comune colla medesima quando risulteranno le frazioni medesime eguali; e cadrà interamente dentro della stessa iperbola, e senza punto toccarla, nel caso di $\pm \frac{an - c}{am}$ minore di $\frac{c}{b}$.

Per decidere colla riga e col compasso quali di questi tre casi avrà luogo, senza descrivere l'ortografia dimandata, si farà (fig. 79) $AB = a$, e gli angoli BAC , BAD eguali rispettivamente a quelli che hanno per tangenti n , m ; indi troverassi la quarta proporzionale geometrica dopo le linee c , b , $\pm(BC - c)$; e risultando questa minore, eguale o maggiore della BD , avranno correlativamente luogo i tre casi suddetti; vale a dire l'ortografia nmi toccherà in un punto la data AVB , quando la quarta proporzionale risulterà maggiore della BD ; queste ortografie avranno un asintoto comune, nel caso che questa risulti eguale alla BD : in terzo ed ultimo luogo la nmi cadrà interamente dentro della AVB , allorchè la detta quarta proporzionale sarà minore della medesima retta conosciuta BD .

Imperciocchè, se x quarta proporzionale è maggiore di BD , risulta $\pm \frac{BC - c}{BD}$ maggiore di $\pm \frac{BC - c}{x}$, e però $\pm \frac{BC - c}{BD}$ o sia $\pm \frac{an - c}{am}$ maggiore di $\frac{c}{b}$, per essere $\pm \frac{BC - c}{x} = \frac{c}{b}$. Così, essendo BD eguale oppure minore della x , si ha nel primo caso $\pm \frac{BC - c}{BD}$ eguale a $\frac{c}{b}$, e nel secondo $\pm \frac{BC - c}{BD}$ minore della medesima frazione $\frac{c}{b}$; quindi ecc.

COROLLARIO. Nella ipotesi che la luce sia diretta, come si suppone comunemente, si ha $m = n = 1$; e però l'ortografia richiesta toccherà in un punto la curva AVB , quando la quarta proporzionale geometrica dopo le rette c , b , $\pm(a - c)$ risulterà maggiore dell' a ; avrà un asintoto comune allorchè questa quarta proporzionale eguaglierà la stessa a ; in fine cadrà interamente dentro la stessa AVB , e senza toccarla, risultando la medesima quarta proporzionale geometrica maggiore del medesimo semiasse a parallelo alle ordinate x .

PROPOSIZIONE XXVI.

Una delle tre superficie di second' ordine essendo disposta e conosciuta, come nella proposizione quarta della seconda parte, determinare l'ortografia dell'ombra che vien portata su di essa dal lembo di una sua sezione od apertura orizzontale di cui si conosce l'ortografia.

Nella soluzione di questa proposizione distinguo i tre casi medesimi che distinsi nella proposizione qui citata, ed incomincio dal primo dei medesimi, e lo tratto con tutta l'estensione che si può desiderare.

PRIMO CASO.

La linea AVB (fig. 80) di second' ordine, avente VT per asse verticale, rappresenti la prima sezione della superficie di second' ordine, e la sua corda orizzontale CD l'ortografia dell'apertura della medesima superficie.

Pel punto K di mezzo della corda CD e per un suo termine C si tirino le altre corde EF , CG parallele alla O , e su di esse come diametri si descrivano i cerchi QhF , $CING$, e si tiri QKH perpendicolare all' EF , ed il raggio MI alla CG , e si facciano le KS , KU eguali all'ordinata della seconda sezione corrispondente alla sua ascissa VK , e la $MZ = MI$ eguale all'altro semiasse della sezione ellittica fatta alla superficie dal piano perpendicolare all'ortografico e che passa per CG : fatto ciò, costruiscansi gli angoli SLE , UXE , MCP eguali al Δ , congiungansi le QLq , XHh , PZ , e tirisi la CN parallela alla PZ ; e finalmente conducansi le hua , qsb , Nc perpendicolari alle EF , CG , ed uniscasi il punto n di mezzo dell' ab al punto c , e si otterranno nelle due rette na , nc due semidiametri conjugati della periferia ellittica rappresentante l'ortografia dimandata; e però sarà essa descrivibile agevolmente, *lemma quattordicesimo.*

La superficie involvente è evidentemente di second' ordine, la linea dell'ombra è una di quelle comuni a questa superficie ed alla data, le quali hanno per altra linea comune il contorno dell'apertura medesima; adunque la linea dell'ombra sarà anch'essa piana, *lemma tredicesimo*; più sarà un'ellisse avente il centro nell'asse della superficie involvente.

Essendo la linea dell'ombra un'ellisse situata nella superficie cilindrica involvente che ha per base l'apertura, l'ortografia dimandata sarà anch'essa una periferia ellittica, la quale avrà i termini di ciascun diametro nelle ortografie delle ombre portate sulla superficie di second' ordine dai termini di un diametro dell'apertura, e per diametri conjugati quelli che congiungeranno le ortografie delle ombre portate dai termini di due diametri conjugati dell'apertura medesima, e ciò per quello che si vede nell'osservazione quinta della proposizione tredicesima.

Così, per la costruzione, i punti S , U saranno nell'ellisse che rappresenta la sezione fatta alla superficie di second' ordine dal piano che passa per la EF ed è perpendicolare all'ortografico, supposto però che siasi adattato all'ortografico medesimo, corollario del *lemma diciottesimo*; come p sarà nell'ellisse dell'analogia sezione che passa per CG , *lemma quindicesimo.*

Ora suppongo al solito che il semicerchio CIG insieme alle rette CN , cN col girare attorno a CG si disponga al di là della prima sezione e perpendicolare alla medesima: in questa situazione egli è evidente che la retta CPp rappresenterà la parallela ai raggi di luce tirata pel punto C , e la pc la perpendicolare tirata al piano ortografico dal punto della superficie di second' ordine, dove cade l'ombra portata da C stesso; quindi c piede di quest' ultima perpendicolare sarà l'ortografia dell' ombra portata dal medesimo punto C sulla stessa superficie di second' ordine.

Similmente, facendo fare un quarto di rotazione intorno ad EF tanto al cerchio EQH , quanto alle rette SU , Ss , Uu , ua , sb , e dalla banda per cui risulti S anteriore al piano della prima sezione, la retta SU diverrà quell' asse dell' apertura, il quale è perpendicolare al piano ortografico, le rette Ss , Uu le parallele ai raggi di luce tirate pei termini di quest' asse, e le ua , sb perpendicolari al piano ortografico condotte dai punti della superficie di second' ordine, nei quali cadono le ombre che portano i termini dell' asse medesimo dell' apertura; quindi i punti a , b , piedi di queste perpendicolari, rappresenteranno le ortografie delle ombre portate sulla superficie di second' ordine dai termini dell' asse dell' apertura, il quale trovasi perpendicolare al piano ortografico.

Ma i due assi di un' ellisse sono anche due suoi diametri conjugati; adunque i punti a e b rappresentando le ortografie delle ombre portate dai termini di uno degli assi della periferia ellittica dell' apertura, e c l' ortografia di quella portata da un termine dell' altro asse della medesima, le rette an , cn saranno due semidiametri conjugati dell' ortografia dimandata, per quello che ho detto poc' anzi relativamente alle ortografie delle ombre portate dai termini dei diametri conjugati dell' apertura in quistione; ciò che dovevasi dimostrare.

OSSERVAZIONE 1. Se la superficie di second' ordine fosse anche di rotazione, e la VT il suo asse, le rette SK , KU sarebbero eguali alle CK , e la MZ media proporzionale geometrica fra le parti sM , Mt della corda orizzontale sMt .

OSSERVAZIONE 2. Le rette Cc , Df fra loro parallele toccheranno la periferia ellittica nei termini del diametro cf di essa, che sarà una corda dell' ortografia di cui si è parlato nella proposizione vigesimaquarta.

SECONDO CASO.

In questo caso particolarissimo, che ha luogo, quando le rette EF , CG siano parallele, per la paraboloide all' asse, e per l' iperboloide ad uno degli asintoti dell' ortografia AVB per trovare l' ortografia in quistione; per la paraboloide si segheranno KL , KG (fig. 81) eguali all' ordinata della seconda sezione e corrispondente alla sua ascissa VK , si farà l' angolo KGH eguale al Δ , tirerassi LM parallela al lato CH , e si troveranno le ascisse VN , VF , che corrispondono ai punti M , H , ove le rette LM , CH segano la parabola che ha il vertice in V , l' asse nella VT , e che passa pei punti L , G , lemma sedicesimo; indi si condurranno dal punto P di mezzo della FN le PR , PQ perpendicolari alla medesima FN ed ambedue eguali alla KD ; e nelle rette QR , FN avransi i due assi della periferia ellittica rappresentante l' ortografia dimandata; e però l' ortografia stessa, lemma quattordicesimo: e per l' iperboloide si condurranno le rette KU , KS (fig. 82) perpendicolari alla EF ed eguali a quell' ordinata della seconda sezione che corrisponde all' ascissa VK ; si farà l' angolo KSs eguale al Δ , si tirerà la

Uu parallela al lato Ss , e troveransi le ascisse Ea , Eb corrispondenti ai segmenti u , s delle rette Uu , Ss colla parabola che ha il vertice in E , l'asse nella EF , e che passa pei punti U , S , *lemma sedicesimo*; indi costruito l'angolo GCp eguale anch'esso al Δ , si troverà, col *lemma* anzi citato, l'ascissa Cc corrispondente al punto dove la retta Cp incontra nuovamente la parabola che rappresenta la sezione fatta all'iperboloide dal piano perpendicolare all'ortografico e condotto lungo la CG , e si avranno nella aP metà di ab , e nella cP due semidiametri conjugati dell'ortografia dimandata; quindi l'ortografia stessa, *lemma quattordicesimo*.

TERZO CASO.

Se le rette EF , CG (fig. 82) parallele alla O non incontreranno nuovamente la sezione prima, e non saranno parallele agli asintoti della medesima, che sono i due casi già contemplati qui sopra, le sezioni fatte all'iperboloide dai piani perpendicolari all'ortografico e condotti lungo le rette medesime EF , CG saranno iperbole simili, *lemma settimo*; e però sostituendo queste iperbole alle due parabole corrispondenti del caso antecedente, e poscia determinando i punti a , b , c col *lemma ventiquattresimo*, si avranno, come sopra, nelle rette aP , cP due semidiametri conjugati dell'ellisse, ortografia richiesta, e per conseguenza l'ellisse medesima, *lemma quattordicesimo*.

OSSERVAZIONE. Ommetto la dimostrazione delle regole esposte in questi ultimi casi, perchè sarebbero vere ripetizioni di quelle del primo, ed in vece faccio riflettere che sì la paraboloide che l'iperboloide possono essere tutte in ombra o tutte in luce, come è facile a comprendersi non solo la possibilità, ma anche in quali casi possa ciò avvenire.

PROPOSIZIONE XXVII.

Di una superficie di second' ordine avente verticale l'asse comune alle due sezioni principali, conoscendosi l'ortografia sì di essa che di una sua apertura piana qualunque, non che la posizione e grandezza dei due assi di una individuata sezione orizzontale, trovare l'ortografia dell'ombra portata dal lembo di questa apertura sulla superficie medesima.

Al solito sia AVB la prima sezione (fig. 83).

Se si volesse soddisfare la presente proposizione seguendo l'ordine stesso tenuto nelle tre precedenti, per evitare la confusione si dovrebbero distinguere almeno nove casi, dai quali nè risulterebbero nove regole differenti necessarie per determinare in tutti i casi l'ortografia in quistione: pertanto, onde risparmiare ai disegnatori una così grande complicazione, in questa occasione sacrifico l'uniformità di metodo, soddisfacendo la proposizione in quest'altro modo, da cui emerge una regola sola, per avere in tutti i casi l'ortografia dell'ombra in quistione, la qual regola riunisce in sè ad una semplicità maggiore di quasi tutte le nove anzidette una mirabile eleganza.

Si tirino le vx , gt , ns parallele alla O , e delle quali la prima sia tangente l'ortografia avb e le altre due seganti, trovinsi le ortografie x , y , z , s , t delle ombre portate sulla superficie di second'ordine dai punti del contorno dell'apertura che hanno per ortografie n , g , v , h , p , corollario del *lemma vigesimosesto*; indi si descriva la linea di second'ordine, *lemma vigesimoquinto*, che passa pei cinque punti x , y , z , s , t , e sarà questa evidentissimamente l'ortografia dimandata, qualunque sia la superficie, la sua apertura e la direzione dei raggi di luce.

OSSERVAZIONE 1. Se la linea avb sarà una parabola, la retta xc che unisce il punto x di contatto con quello di mezzo di una delle corde yt , zs rappresenterà un diametro della linea zxs ; e se sarà avb un'ellisse, facendo passare la ns pel suo centro, e congiungendo c punto di mezzo della zs al punto x , avransi nelle rette cs , cx due semidiametri conjugati dell'ellisse rappresentante l'ortografia dimandata; quindi in entrambi questi casi si potrà descrivere l'ortografia medesima senza determinare i punti y , t .

OSSERVAZIONE 2. Se l'apertura della superficie di second'ordine non sarà piana, ma qualsivoglia, anco non soggetta a legge conosciuta o definita, si descriverà l'ortografia dell'ombra cagionata dal lembo di essa, determinando tutt' i suoi punti, come si sono trovati superiormente i cinque s , t , x , y , z .

OSSERVAZIONE 3. Dovrei qui esporre le semplificazioni a cui vanno soggette le regole anzi esposte, quando la superficie di second'ordine sia di rotazione coll'asse verticale o perpendicolare al piano ortografico, e che l'apertura sia un parallelo; ma siccome dovrò tornare su questo soggetto, così per ora mi limiterò all'esposizione della seguente proposizione, la quale occupa, se non m'inganno, vantaggiosamente il suo posto.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Della paraboloide di rotazione che ha l'asse perpendicolare al piano ortografico, conoscendosi l'altezza ed il parallelo che rappresenta l'apertura, trovare l'ortografia dell'ombra portata dalla periferia di quest'apertura sulla medesima superficie, o sia il contorno dell'ombra che accade sulla stessa superficie, nell'ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria.

Sia D il centro del cerchio ABC (fig. 84) che rappresenta l'apertura, ed n l'altezza della paraboloide o sia la distanza fra D ed il vertice della medesima.

Si faccia l'orizzontale DF doppia della n , uniscasi F al termine inferiore del raggio verticale DC , si tiri CE perpendicolare alla CF , EH verticale ed eguale alla DE , e si descriva col centro H e col raggio eguale alla CD il cerchio $BGAM$, e sarà BGA l'ortografia dimandata.

Nominando \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} le coordinate rettangole della paraboloide riferita alle DF , DC ed alla orizzontale tirata per D di là del piano della sezione ABC , e p il parametro della parabola che la genera, rotando intorno l'asse delle y , si ha

$$\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = p(n - \dot{y})$$

per equazione della medesima paraboloide; così, denominate x , y , z le coordinate analoghe della periferia ABC , si ha per equazione

$$x^2 + y^2 = \overline{CD}^2 = pn;$$

e chiamando x', y', z' le coordinate della parallela ai raggi di luce che passa pel punto a cui corrispondono le coordinate x, y, z , si ottengono le seguenti

$$y' = x' - x, \quad z' - z = y'$$

per equazioni di essa retta.

Si ponga nell'equazione $x'^2 + y'^2 = pn$,

in vece delle x, y, z , i loro valori che danno le due della parallela ai raggi di luce, e si avrà

$$(x' - y')^2 + (z' - y')^2 = np,$$

$$\text{o sia } x'^2 + z'^2 + 2y'^2 - 2x'y' - 2y'z' = np$$

per equazione dell'attuale superficie involvente, x', y', z' esprimendo qui le sue coordinate; e però le seguenti

$$x^2 + z^2 + 2y^2 - 2xy - 2yz = np, \quad x^2 + z^2 = np - py$$

rappresenteranno le linee comuni alla paraboloide ed all'involvente stessa, x, y, z esprimendo le coordinate analoghe di un punto qualunque di queste linee.

Sostituendo nella prima di queste due equazioni, in luogo di $x^2 + z^2$, il suo valore cavato dalla seconda, si ottiene

$$np - py + 2y^2 - 2xy - 2zy = np;$$

$$\text{cioè od } y = 0, \text{ oppure } y - z - x = \frac{1}{2}p;$$

quindi le equazioni della periferia ABC e della linea dell'ombra portata, le quali sono le due linee comuni alla paraboloide ed alla involvente, saranno, per la prima

$$y = 0, \quad x^2 + z^2 = np - py,$$

$$\text{ovvero } y = 0, \text{ ed } x^2 + z^2 = np,$$

e per l'altra, cioè di quella del contorno dell'ombra, le seguenti

$$y - z - x = \frac{1}{2}p, \quad x^2 + z^2 = np - py.$$

Ora eliminando y dalle equazioni del contorno dell'ombra, cioè da queste ultime due, si ha

$$x^2 + z^2 = np - px - pz - \frac{1}{2}p^2$$

per equazione evidentemente dell'ortografia dimandata. Ma quest'equazione equivale alla

$$\left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}p\right)^2 = np,$$

la quale esprime la periferia di un cerchio, il cui raggio è eguale a \sqrt{np} o sia alla CD ,

ed al cui centro corrispondono le coordinate $-\frac{1}{2}p, -\frac{1}{2}p$; adunque, per essere

$$DE = EH = \frac{\overline{CD}^2}{DF} = \frac{np}{2n} = \frac{1}{2}p,$$

cioè al semiparametro della parabola generatrice, sarà BCA l'ortografia dimandata; come ho dichiarato.

DE' CONTORNI

DELLE OMBRE PORTATE SULLE SUPERFICIE DI ROTAZIONE.

PROPOSIZIONE XXIX.

Data l'ortografia di una superficie di rotazione che ha l'asse verticale, trovare quella dell'ombra portata su di essa dal lembo del suo spaccato ordinario.

Sia MVL lo spaccato (fig. 85) della superficie, e VB il suo asse, e sia ML la solita retta orizzontale comune ai piani ortografico ed icnografico.

Si descriva MCL traccia icnografica della superficie involvente, corollario primo del *lemma primo*, si tiri BE parallela alla I , si faccia l'angolo DBL eguale al dato BCa della figura prima; indi conducasi l'orizzontale GH , la verticale PQ , descrivasi l'archetto C col centro Q ed il raggio eguale alla GH , a questa si tiri la perpendicolare AC , si prenda $CN=PA$, e sarà N un punto dell'ortografia dimandata.

Sia condotta la retta QT parallela alla ML .

Il piano orizzontale, che passa per la retta GH , interseca la superficie di rotazione nella periferia orizzontale che ha il centro in G ed il raggio GH , e taglia la superficie involvente in una linea eguale perfettamente alla MCL ; e queste due linee si segano in un punto posteriore al piano MVL , il quale si trova nella linea dell'ombra di cui si parla; e però se da questo punto si tirerà la perpendicolare al piano MVL , nel piede di essa si avrà quel punto della GH appartenente anche all'ortografia dimandata.

Si supponga che la traccia MCL insieme alle rette BQ , QC , CT , QT , rotando intorno alla ML , si disponga orizzontale al di là dal piano MVL , e che dalla nuova posizione in cui passano i punti Q e C siano tirate due rette parallele ai raggi di luce sino al piano orizzontale della GH . Queste ultime due rette essendo parallele ed intercette fra due piani paralleli, saranno anche eguali; e però la retta che unisce i loro termini superiori sarà eguale e parallela alla CQ . Ma i termini superiori delle medesime due rette parallele condotte dalle nuove posizioni dei punti Q , C cadono l'uno in G , e l'altro nella intersecazione della superficie involvente e del piano orizzontale anzidetto; adunque questo punto d'intersecazione avente dal punto G una distanza eguale alla QC o sia alla GH sarà anche nella periferia orizzontale avente il centro in G ed il raggio GH .

Concluesi pertanto che la retta che unisce il punto G al segmento delle linee, le quali rappresentano le intersezioni fatte dal piano orizzontale della GH alla superficie involvente ed a quella di rotazione, concluesi, dico, che questa retta è eguale e parallela a quella che congiunge le novelle posizioni dei punti Q e C .

Ora se dal segmento anzidetto, il quale appartiene evidentemente alla linea dell'ombra portata, si tiri la perpendicolare al piano ortografico o sia alla retta GH , nel piede di questa perpendicolare cadrà il punto dell'ortografia dimandata che trovasi nella retta GH medesima. Ma il triangolo costituito da questa perpendicolare, dalla porzione della GH intercetta fra il suo piede ed il punto G , e quella retta che congiunge G al medesimo segmento, ha tutti i lati paralleli a quelli del CQT , e l'ultimo anche eguale al QC ; dunque il suo lato, che cade nella GH , il quale rappresenta la distanza tra G ed il punto dell'ortografia in quistione cadente nell'orizzontale GH , sarà anch'esso eguale

alla QT o sia PA ; e conseguentemente, essendosi segata $GN=PA$, il punto N apparterrà all'ortografia dimandata; ciò che ecc.

COROLLARIO. Tirando la perpendicolare alla ML dal punto y , comune alla traccia MyL ed all'arco circolare y descritto col centro B , ed il raggio BL , avrassi nel piede di essa il punto x , dove l'ortografia nNx sega la retta ML ; e conducendo la tangente all'ortografia data MVL che sia parallela alla O , nel punto di contatto si avrà il punto comune alla stessa MVL ed all'ortografia dimandata, il quale sarà anche un loro punto di contatto.

OSSERVAZIONE 1. Se dell'ortografia in quistione si vorrà la sola porzione nNx , della traccia MCL basterà descrivere la parte avente i termini l'uno in y , e l'altro nel punto in cui cadrebbe l'ombra portata dall' n , le rimanenti parti di essa traccia risultando inutili.

Pertanto nella descrizione della traccia -- yC -- converrà trovare primieramente il punto nel quale cadrebbe l'ombra portata dallo stesso punto n , indi i punti di essa traccia antecedenti a questo, e si continuerà sino all' y comune alla periferia circolare che ha il centro in B ed il raggio eguale a BL ; giacchè in tal guisa si risparmierà di descrivere le parti della traccia medesima che sono inutili a questo proposito.

OSSERVAZIONE 2. Se i raggi di luce avranno l'ordinaria direzione, i due angoli EBL , DBL saranno ambi semiretti, e però le rette BD , BE coincideranno, ed il punto Q cadrà in P ; quindi fatto l'angolo DBL semiretto, descritto l'archetto C col centro P ed il raggio GH , e poscia, come sopra, tirata CA perpendicolare alla stessa GH , e segata $GN=PA$, avrassi immediatamente il punto N , che appartiene all'ortografia richiesta.

OSSERVAZIONE 3. Se il piano dello spaccato non passerà per l'asse di rotazione della superficie, ma sarà parallelo al medesimo ed al piano ortografico: supposta ML (fig. 86) la retta comune ai due soliti piani coordinati, MBL l'ortografia dello spaccato della superficie, BD quella dell'asse di rotazione, ed E l'icnografia del medesimo asse; per avere l'ortografia dell'ombra portata sulla superficie di rotazione, delineata la traccia MH icnografia della superficie involvente, corollario primo del *lemma primo*, si condurrà EG parallela alla I , e si farà l'angolo FDL eguale al BCa , della figura prima; indi, condotta l'orizzontale KN , tireransi le verticali FG , NP , si descriverà l'archetto H col centro G e raggio EP , calerassi la HC perpendicolare alla KN , e segata $KA=FC$, sarà A evidentemente un punto dell'ortografia dimandata.

Se i raggi di luce avranno la direzione ammessa nell'antecedente osservazione, la figura $DFGE$ sarà parallelogrammica, e però $Em=Gn$; quindi prendendo nG eguale ad Em , si avrà immediatamente il centro G , senza condurre nè la DF , nè la verticale GF .

Le dimostrazioni di queste regole sono interamente simili a quelle esposte superiormente per la proposizione proposta.

PROPOSIZIONE XXX.

Conoscendosi l'ortografia di una superficie di rotazione avente l'asse orizzontale e parallelo al piano ortografico, trovare quella dell'estremo dell'ombra che porta il suo spaccato ordinario su di essa.

Sia ML (fig. 87) l'asse di rotazione della superficie, ed MFL lo spaccato ordinario.

Descritta la linea MoO , lemma vigesimosettimo, nella verticale HO , si prenda OC eguale alla DF , si descriva col centro C e col raggio CO l'archetto I , tirisi IA perpendicolare alla OH , e si prenda $FS = AO$, oppure $SD = AC$, e sarà S quel punto dell'ortografia dimandata, il quale cade nella verticale DF .

Il piano che passa pel punto D perpendicolarmente alla retta ML sega la superficie di rotazione nella periferia del cerchio verticale che ha il centro in D ed il raggio eguale alla DF , e sega l'involvente in una linea eguale perfettamente alla stessa MoO , lemma vigesimosettimo: queste due linee si tagliano in un punto comune al contorno dell'ombra di cui si parla; e però se da questo loro segamento si condurrà la perpendicolare al piano MFL o sia alla retta DF , nel piede di questa perpendicolare avrassi quel punto della stessa DF appartenente anche all'ortografia dimandata.

Ma se il piano $MGOF$ colle rette IA , CO , rotando attorno alla MG , si dispone anteriormente al piano MFL in modo che risulti perpendicolare alla ML , i punti O e C trasferiscansi negl'incontri di esso piano colle parallele ai raggi di luce che passano pei due F , D ; e se da questa posizione esso piano si fa muovere verso D in maniera che ogni suo punto percorra una parallela ai raggi di luce, pervenuto che esso sia al punto D , i due incontri suddetti cadranno l'uno in F , e l'altro nello stesso punto D ; adunque il punto I della medesima linea MoO trasferito fissamente su di esso piano ora troverassi nel segamento suddetto delle due linee rappresentanti le intersezioni fatte dal piano che passa per D perpendicolarmente alla ML , alle due superficie di rotazione ed involvente, e la retta IA trasportata anch'essa insieme al piano della MoO si confonderà colla perpendicolare tirata dal segamento medesimo al piano MFL o sia alla retta DF ; quindi la distanza fra il punto D e quello dell'ortografia dimandata, il quale cade nella stessa FD , sarà eguale alla AC , e conseguentemente sarà esso l' S determinato sopra, come ho asserito.

OSSERVAZIONE 1. Il punto di contatto fra la curva MFL e la retta parallela alla O sarà anco il punto di contatto fra la stessa MFL e la linea rappresentante l'ortografia sopra descritta, ed anche un termine di essa ortografia.

OSSERVAZIONE 2. Anche in questa proposizione se l'ortografia a descriversi sarà la sola porzione cadente nello spazio MFL , l'ultimo punto della traccia MoO , che bisognerà determinare, sarà quello proveniente dall'anzidetto contatto, e sarà vantaggioso incominciare la determinazione dall'ortografia di questo medesimo contatto.

Ad esempio. Nell'ipotesi che i raggi di luce abbiano l'ordinaria direzione, si troverà il punto m (fig. 88) di contatto fra la curva $MFmL$ e la sua tangente che fa l'angolo semiretto colla ML , si prenderà $mx = Mr$, ed x sarà l'ultimo punto della traccia MTN che si dovrà delineare. Fatto ciò, prenderansi nelle verticali DN , dn , -- primieramente le parti FN , fn , --

eguali alle MD , Md , - -, e poscia $NC = CT = DF$, $nc = ct = df$, - -, e si tireranno ad esse le perpendicolari TV , tv , - -, e segheransi $SD = CV$, $sd = cv$, - -, e saranno S , s , - - punti appartenenti all'ortografia dimandata.

OSSERVAZIONE 3. Se il piano dello spaccato, il cui lembo porta l'ombra sulla superficie, non passerà per l'asse della superficie medesima, ma sarà ad esso parallelo ed anco al piano ortografico, ed avrà una data distanza dall'asse medesimo: supposto ML (fig. 87) l'ortografia dell'asse della superficie, MFL il suo spaccato, ed αD la distanza fra lo spaccato e questo asse; per avere il punto S dell'ortografia della linea dell'ombra portata dal lembo in questo caso, dopo avere descritta la traccia icnografica della superficie involvente, corollario primo del *lemma primo*, trovato il punto C come sopra, si prenderà l'orizzontale $C\beta$ eguale alla $D\alpha$ a destra della HO se il piano MFL sarà posteriore all'asse della superficie, ed a manca se sarà anteriore, e si descriverà l'archetto I col centro β e raggio βO ; indi condurrassi IA perpendicolare alla HO , e si prenderà $SD = AC$, e sarà S , ecc.

PROPOSIZIONE XXXI.

Di una superficie di rotazione che ha l'asse perpendicolare al piano ortografico, conoscendosi la sua icnografia o sia la generatrice piana, e l'ortografia di un suo parallelo, trovare l'ortografia dell'ombra che porta la periferia di questo parallelo o sia il contorno dell'ombra che accade sopra di essa superficie.

FT (fig. 89) sia l'asse della superficie, MCB la sua generatrice piana situata nel piano icnografico coll'asse stesso, ed MAN rappresenti la periferia del parallelo o spaccato che porta l'ombra supposto adattatasi al piano icnografico col rotare indietro attorno alla ML comune ai due piani ortografico ed icnografico.

Condotta l' HFI parallela alla O , e la GFE parallela alla I , si tiri CDE parallela alla ML , la EI alla TF , si descrivano col centro I e raggio MF , e col centro F e raggio CD gli archetti α , ed i loro segamenti saranno due punti dell'ortografia dimandata.

S'immagini un piano parallelo allo spaccato MAN al di là di esso e ad una distanza eguale alla DF : questo piano segherà evidentemente la superficie di rotazione nella periferia di un cerchio verticale che avrà il centro nell'asse FT orizzontale ed il raggio eguale alla CD , e la superficie involvente in un cerchio pure verticale ed eguale alla MAN , e che avrà il centro nell'asse della medesima superficie involvente, e però nella retta tirata pel punto I perpendicolarmente al piano stesso MAL . Ma questi due cerchi hanno evidentemente per ortografie quelli delle cui periferie sono parti gli archetti α ; adunque i segamenti di questi archetti rappresenteranno le ortografie dei segamenti delle periferie dei medesimi due cerchi, e conseguentemente due punti dell'ortografia dimandata.

OSSERVAZIONE 1. Nell'ipotesi ordinaria rispetto alla direzione della luce la FI è eguale evidentemente alla FH ; e però non farà bisogno di segnare le FE , DE , EI , ecc.

Nel medesimo caso si potrà determinare l'ortografia del contorno dell'ombra con maggiore semplicità nel modo seguente:

La linea MCB , che devesi fare per determinare l'ortografia dimandata, si disegni nella Mcb anteriore alla ML , e si faccia l'angolo LFI semiretto; indi si tiri l'orizzontale cdI , e si descrivano col centro I e raggio MF e col centro F e raggio dc gli archetti α , e nei loro segmenti α avransi evidentemente due punti della linea dimandata; giacchè, se Fd eguaglia FD , la dc risulta eguale alla DC .

OSSERVAZIONE 2. Per trovare i termini dell'ortografia in quistione, o sia i suoi segmenti o punti di contatto colla periferia MAN , si condurrà la tangente MT della curva MB , troveransi, corollario della proposizione tredicesima, i segmenti fra la periferia MAN e l'ellisse rappresentante l'ortografia dell'ombra portata dalla stessa periferia sulla superficie del cono retto che ha per altezza la sottotangente FT e per base lo stesso cerchio MAN ; e questi saranno evidentemente gli stessi punti dimandati.

Se la tangente MT risulterà parallela all'asse TF , la superficie anzidetta circoscritta a quella di rotazione sarà cilindrica; e però, condotte le tangenti alla linea MAN parallele alla O , nei punti di contatto si avranno immediatamente gli anzidetti, siccome è evidente.

PROPOSIZIONE XXXII.

Data una superficie di rotazione che ha l'asse verticale, e la sua ortografia e quella di una sezione piana qualunque fatta pel suo asse, trovare l'ortografia dell'ombra che porta il lembo di questa sezione sulla superficie medesima.

Sia MVL (fig. 90) l'ortografia della superficie, e DVP quella della sezione piana che porta l'ombra.

Si tiri la DE perpendicolare alla ML asse, e si congiunga la FE eguale alla MF , e si trovi la traccia icnografica EGH della superficie cilindrica, che ha le rette generatrici parallele alla $I-O$, e per direttrice la sezione avente DVP per ortografia, e la retta EFH per icnografia, lemma primo, cioè la sezione il cui lembo porta l'ombra; indi si tiri FK parallela alla I , si faccia l'angolo IFL eguale al BCa della figura prima, conducasi l'orizzontale AJ e la verticale IK , si descriva col centro K e col raggio AJ l'archetto G , calisi la verticale GB , e si seghi AN eguale alla IB , e sarà N il punto dove l'orizzontale AJ segnerà l'ortografia dimandata, e però un punto di questa ortografia: veggasi la proposizione vigesimanona.

OSSERVAZIONE. Se la sezione che ha DVP per ortografia cadrà di là dalla MVL , si condurrà la retta DE superiormente alla ML , e poi onde avere l'ortografia dell'ombra portata dalla medesima sezione si procederà come sopra.

Il termine superiore dell'ortografia xNy di cui si parla sarà un punto della linea PV , che si troverà facilmente, ecc.

Questa proposizione coll'antepenultima non solo ha comune la dimostrazione, ma anche i corollari.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Il cerchio SBV (fig. 91) esprime lo spaccato di fronte di una superficie di rotazione che ha l'asse perpendicolare al piano ortografico, BTL la posizione presa mediante un quarto di rotazione fatto intorno al raggio BA verticale dalla sezione fatta alla superficie col piano verticale condotto per l'asse di essa e perpendicolare all'ortografico; trovare l'ortografia dell'ombra portata sulla superficie dal lembo di questa sezione.

Costruita la traccia BGQ , lemma vigesimottavo, si descrivano gli archetti $n, z, - -$ coi centri $F, f, - -$ e coi raggi $FG, fg, - -$, e si tirino le $nr, uz, - -$ perpendicolari alle $FG, fg, - -$; indi facciansi le $As, Av, - -$ eguali rispettivamente alle $Fr, fu, - -$ e le orizzontali $st, vy, - -$ alle $rn, uz, - -$, e saranno $t, y, - -$ punti dell'ortografia dimandata $ty - - I$.

Suppongo che il piano della traccia BGQ si muova indietro, ed in modo che ogni suo punto percorra una parallela ai raggi di luce: giunto il punto F nell'asse della superficie di rotazione, il circolo che ha il centro in F ed il raggio eguale alla FG , cadrà nel parallelo della medesima superficie avente il centro dove si troverà F , e la traccia BGQ si confonderà coll'intersecazione fatta dal piano di questo parallelo alla superficie involvente, per cui il punto n cadrà nel segmento di questa intersecazione e della periferia del parallelo; e però essendosi fatto $As = Fr, st = nr$, il punto t esprimerà l'ortografia di questo medesimo segmento, e conseguentemente un punto dell'ortografia dimandata.

Quindi, siccome tutti i punti $t, y, - -$ sono a circostanze affatto affatto simili a quelle del t , sarà $ty - - I$ l'ortografia dimandata.

OSSERVAZIONE 1. Se dal punto di contatto T fra la curva BTL e la sua tangente che fa colla orizzontale ML l'angolo eguale al complemento di Γ si condurrà la TI perpendicolare alla AB , si avrà il punto I segmento fra questa retta AB e l'ortografia in quistione.

OSSERVAZIONE 2. Così, se abbisognerà la sola porzione dell'ortografia cadente nell'angolo BAL , onde risparmiare le operazioni inutili, dal punto T si calerà la verticale TN , condurrassi la NP parallela alla CF , o si farà pel punto N ciò che si è fatto pel C ; indi si farà la verticale PQ eguale alla TN , e sarà QGB la sola porzione della traccia suddetta che bisognerà descrivere: si procederà poi alla determinazione delle coordinate $fu, uz, - -$ dei punti n, z , incominciando dai prossimi al Q , e si continuerà sino a quello che cadrà in B ; giacchè da quest'ultimo proverrà l'altro termine della ortografia, il quale sarà nella parallela alla O e che passa per B .

PROPOSIZIONE XXXIV.

Data l'ortografia di una superficie di rotazione che ha l'asse verticale, e quella di una sua apertura orizzontale, trovare l'ortografia dell'ombra che porta il lembo di quest'apertura sulla medesima superficie.

L'ortografia della superficie e ad un tempo il suo spaccato ordinario sia AVB (fig. 92), e quella della sua apertura orizzontale DE .

Si disegni VFO asse di rotazione della superficie, la FG parallela alla O , e la FH che faccia colla FE l'angolo EFH eguale al dato BCA della figura prima; indi si tiri l'orizzontale IQ , la verticale PN , e si descrivano gli archetti m, m' col centro N ed il raggio EF , e gli s, s' facendo centro in F e col raggio IQ , e dai loro segmenti α, β si calino le $\alpha r, \beta r'$ verticali, ed avransi in r, r' due punti dell'ortografia dimandata rvr' .

Si tiri In parallela alla FN , o sia facciasi l'angolo QIn anch'esso eguale all'anzidetto BCA , e si estenda la verticale NP sino in n .

Immagino il piano orizzontale per la IQ ; questo interseca la superficie di rotazione nella periferia del cerchio orizzontale avente il centro in I ed il raggio eguale alla IQ , e la superficie involvente nella periferia pure circolare ed orizzontale che ha il raggio eguale ad EF ed il centro nell'incontro del piano stesso e della parallela ai raggi di luce che passa per F , o sia nel punto ove l'orizzontale passante per P perpendicolarmente alla IQ è incontrata dall'altra orizzontale condotta per I di là dalla IQ , e che fa con questa l'angolo eguale al dato HFE .

I segmenti di queste due periferie sono punti della linea dell'ombra di cui si parla, e però tirate da essi le perpendicolari al piano ortografico o sia alla retta IQ , nei piedi di esse avransi due punti dell'ortografia medesima.

Se quella parte del piano immaginato, la quale cade di là di AVB , rotando intorno alla IQ insieme alle linee esistenti in essa, si dispone sotto della IQ , e la rimanente parte superiormente della medesima retta, il centro della sezione fatta da esso piano alla superficie involvente cadrà evidentemente in n ; e però i piedi delle perpendicolari anzidette saranno quegli stessissimi delle perpendicolari tirate alle medesime IQ dai segmenti delle periferie che hanno i centri in I ed n , ed i raggi eguali, la prima alla IQ , la seconda alla EF .

Ma i triangoli che hanno per base la In ed i vertici nei due segmenti di queste ultime periferie, sono eguali perfettamente ai due $F\alpha n, F\beta n$, stante l'eguaglianza dei lati; adunque, *lemma vigesimonono*, le perpendicolari tirate dai loro vertici o dai segmenti delle due anzidette periferie cadranno nelle $\alpha r, \beta r'$; e però i piedi r, r' di queste coincideranno coi piedi di quelle, o saranno due punti dell'ortografia dimandata; ciò che ecc.

OSSERVAZIONE 1. Tirando dai punti D, E le parallele alla FG , avransi in esse due tangenti dell'ortografia anzi descritta, i cui punti di contatto saranno comuni coll'ortografia dell'ombra portata dalla linea AVB e delineata nella proposizione vigesimanona; questi contatti saranno i due termini inferiori della linea esprimente l'ortografia della linea dell'ombra portata dal lembo della semiapertura posteriore al piano verticale AVB , e la sola che si dovrà descrivere nei disegni degli spaccati ordinarij delle volte.

OSSERVAZIONE 2. Se i raggi di luce avranno tal direzione che gli angoli GFE, HFE risultino eguali, le due rette FG, FH coincideranno; e però

N centro degli archetti m, m' cadrà in P ; quindi in questo caso, il quale ha luogo evidentemente quando i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria, si guadagnerà assai in semplicità; giacchè non si avrà bisogno di condurre le verticali analoghe alla NP .

OSSERVAZIONE 3. Rappresentando colla ML l'icnografia del piano dello spaccato ordinario della superficie di rotazione, fatto l'angolo TOL eguale all' HFE , condotta PT verticale o sia prolungata la NP sino a segare la ML , e poscia descritti gli archetti circolari y, y' facendo centro in T e col raggio eguale alla FE , ed i due x, x' col centro O e col raggio eguale alla IQ , si avranno nei loro segmenti t, t' due punti dell'icnografia della linea dell'ombra della quale sopra si è trovata l'ortografia.

Imperciocchè, se le sezioni fatte alla superficie di rotazione ed all'involvente del piano orizzontale immaginato secondo la IQ si calassero verticalmente sino al piano icnografico, egli è evidente che esse coprirebbero le due periferie descritte coi centri T, O ed i raggi eguali alle EF, IQ , ed i loro segmenti cadrebbero per conseguenza nei t, t' ; quindi ecc.

Nel modo stesso che si sono determinati i due punti t, t' , troveransi quanti altri punti si vorranno dell'icnografia medesima.

OSSERVAZIONE 4. Tutto ciò che si è detto qui sopra rispetto all'ortografia in quistione, nell'ipotesi che l'asse della superficie sia verticale, vale, comunque sia disposto, questo asse parallelamente al piano ortografico, purchè si sostituisca all'angolo BCA della figura prima quello compreso dalla IQ e dalla proiezione ortogonale della parallela ai raggi di luce fatta sul piano del parallelo della superficie, il quale passa per la retta IQ , ed alle rette verticali ed orizzontali le parallele e perpendicolari all'asse medesimo; così, se l'asse sarà orizzontale, o sia se la superficie di rotazione sarà quella considerata nella proposizione trentesima, e l'apertura una sezione perpendicolare all'asse medesimo, avrassi l'ortografia dell'ombra portata dalla periferia di quest'apertura sulla superficie colla regola dichiarata qui sopra, sostituendo all'angolo BCA anzidetto il Γ pure dato, e alle rette orizzontali e verticali le verticali ed orizzontali.

PROPOSIZIONE XXXV.

Di una superficie di rotazione avente l'asse verticale, conoscendosi la sua ortografia e quella di una sua apertura qualunque, trovare l'ortografia dell'ombra portata sulla superficie dal lembo di essa apertura.

Sia MVL (fig. 93) l'ortografia della superficie, ed fkr quella di una sua apertura posteriore al piano che passa per l'asse di rotazione.

Si trovi primieramente l'icnografia RKF , lemma trentesimo, indi si descriva la traccia icnografica 234 della superficie cilindrica che ha le rette generatrici parallele alla $I-O$ ed il contorno dell'apertura per direttrice, lemma primo: fatto ciò, si troverà l'ortografia vsx richiesta nel modo dichiarato nella proposizione vigesimanona, e come lo mostra chiaramente anche la figura.

PROPOSIZIONE XXXVI.

L'asse di una superficie di rotazione è la ML (fig. 94) orizzontale e parallela al piano ortografico, si conosce MHL ortografia di essa superficie, ed FEK di una sua apertura, trovare l'icnografia di questa apertura, la traccia fatta al piano che passa per AMN (fig. 94) perpendicolarmente alla ML dalla superficie cilindrica avente le rette generatrici parallele ai raggi di luce, e per direttrice il contorno della stessa apertura; in ultimo determinare l'ortografia dell'ombra portata sulla superficie di rotazione dal lembo della medesima apertura.

La ML asse di rotazione della superficie di rotazione sia anche quello comune ai piani ortografico ed icnografico.

Si tiri CH perpendicolare alla ML , ed EI parallela, si descriva l'arco HI col centro G , si prenda $GB = EI$, e sarà B un punto dell'icnografia richiesta UBD .

Si conducano BA , EN , NO parallele alle I , O , ML , prendasi NO eguale ad MA , ed in O avrassi un punto della traccia SOT dimandata; supposto che siasi adattata al piano MHL rotando attorno alla verticale MN .

In ultimo si seghi della verticale OP la parte OQ eguale alla CH , si descriva l'archetto circolare S col centro Q e col raggio OQ , si tiri SR perpendicolare alla stessa OQ , e facciasi GV eguale alla QR , ed il punto V apparterrà all'ortografia xVy dell'ombra in quistione.

Facendo rotare HIC intorno alla GH di un quarto di rotazione, ed in modo che si disponga di là del piano MHL , evidentemente il punto I passerà in quello del contorno dell'apertura, il quale ha l' E per ortografia; e però essendosi fatto $GB = EI$, sarà B l'icnografia del medesimo, come ho detto.

Le linee SOT , xVy rappresenteranno la traccia e l'ortografia richiesta per quello che si è già detto nella proposizione trentesima e nel lemma ventesimosettimo.

OSSERVAZIONE 1. Se dell'apertura si conoscerà l'icnografia UBD invece dell'ortografia, e si vorrà questa, si descriverà l'arco circolare CH , facendo centro in G , si tirerà BC parallela alla ML , segherassi EG eguale alla BC , ed E sarà un punto della richiesta ortografia FEK .

OSSERVAZIONE 2. Così, se l'apertura che ha l'ortografia data FEK sarà di qua della sezione che passa per l'asse ed è parallela al piano ortografico, prendendo $CL = EI$, otterrassi in l un punto dell'icnografia old della medesima apertura.

PROPOSIZIONE XXXVII.

Data l'ortografia e l'icnografia di una superficie di rotazione avente l'asse perpendicolare al piano ortografico, e l'ortografia di una sua apertura, trovare l'icnografia di questa, la traccia ortografica della superficie cilindrica che ha il contorno dell'apertura stessa per direttrice, e le rette generatrici parallele ai raggi di luce; in ultimo delineare l'ortografia dell'ombra che porta questo contorno medesimo sulla superficie.

Sia ML (fig. 95) la retta orizzontale che passa per D centro della stessa ortografia MFL della superficie ed è nei due piani coordinati, BD l'asse della medesima superficie, ed MBL la sua icnografia, ed EGF l'ortografia dell'apertura.

Si faccia DR eguale alla DG , le RC , GP parallele alla BD , e la PA eguale alla RC , oppure la CA parallela alla ML , ed avrassi in A un punto appartenente alla NAQ icnografia dell'apertura.

Tirinsi le AH , GS , HS parallele rispettivamente alle I , O , BD , e si determinerà evidentemente il punto S della TSV traccia ortografica della superficie involvente; indi si faccia per la traccia TSV e l'ordinata CZ della MCB ciò che si è fatto nella proposizione trentesimaterza per la traccia BGQ e l'ordinata CD della BTL , e si otterrà l'ortografia egf dell'ombra portata sulla superficie dal lembo dell'apertura che ha EGF per ortografia.

Il punto che ha l'ortografia in G si trova nella periferia del parallelo avente il raggio eguale alla DG , e però la sua icnografia sarà nella CZ traccia icnografica di questo parallelo. Ma la medesima icnografia si deve trovare nella GP ; adunque sarà essa in A .

Così, per essere le AH , GS parallele rispettivamente alle I , O , e la HS perpendicolare alla ML , sarà S un punto della traccia ortografica della superficie involvente, lemma primo.

OSSERVAZIONE. Per avere l'ortografia EGF , quando sia data l'icnografia NAQ , si tireranno le CZ , GA parallele alle ML , BD , e si prenderà $DG = CZ$, ed avrassi un punto G dell'ortografia, ecc.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

Trovare l'ortografia dell'ombra portata da una data retta orizzontale sopra una superficie di rotazione che ha l'asse verticale, conoscendosi l'ortografia sì delle superficie che del suo asse, e l'ortografia ed icnografia della retta obbiettiva.

Sia FEG l'ortografia (tav. IX, fig. 96) della superficie di rotazione, EM quella del suo asse; ed AB , CL siano l'ortografia e l'icnografia della retta obbiettiva, ed ML sia la retta comune ai piani ortografico ed icnografico.

Condotta MD perpendicolare alla DL , e la DH parallela alla I , si tirino le LB , HI , DN parallele alla ME , e la NI alla O ; indi congiungasi la

BIP e la NP : fatto ciò, tirinsi successivamente le CK , OQ , RQR' perpendicolari rispettivamente alle EM , LM , DM , descrivansi gli archetti R , R' col centro M ed il raggio eguale alla GK , conducansi le Rr , $R'r'$ parallele alla EM , ed avransi in r , r' due punti dell'ortografia dimandata.

Essendo I e B gl'incontri del piano ortografico e delle rette $ANB - CDL$, $NI - DH$, cioè della data e della parallela ai raggi di luce che passa pel punto $D - N$, sarà BIP la traccia ortografica del piano di queste medesime due rette o sia di quel piano la cui intersecazione colla superficie di rotazione costituisce la stessissima linea dell'ombra in quistione.

Così, per essere MD perpendicolare alla CL , il piano che passa per essa e per EM asse della superficie non solo sarà perpendicolare alla stessa CL , ma anche alla retta data; e però al piano anzidetto, cioè al piano delle due rette $NI - DH$, $ANB - CDL$.

Il punto $D - N$ è comune ai due piani qui nominati, per essere nella retta $ANB - CDL$ e nella parallela alla AM tirata pel punto D , le quali giacciono l'una in uno e l'altra nell'altro dei medesimi due piani; il punto P ovvero $M - P$ troverassi nei medesimi due piani, per essere nelle loro tracce ortografiche; adunque le rette NP , MD , che uniscono separatamente le ortografie e le icnografie di questi punti, rappresenteranno la prima l'ortografia, e la seconda l'icnografia della retta comune intersecazione dei medesimi due piani.

S'immagini il piano orizzontale pel punto K , e segherà la superficie di rotazione nella periferia orizzontale che ha il centro in K ed il raggio eguale alla KG , ed il piano delle $NI - DH$, $ANB - CDL$, cioè dell'ombra nella retta che passa pel punto $O - Q$ ed è perpendicolare al piano delle AM , MD : i segmenti di queste due intersezioni appartenendo al piano dell'ombra ed alla superficie di rotazione, saranno due punti della linea dell'ombra stessa, e propriamente quelli che avranno le ortografie nell'orizzontale GK .

Ma la periferia orizzontale avente il centro in K ed il raggio KG ha per icnografia la RR' , e la retta che passa pel punto $O - Q$ ed è perpendicolare al piano delle AM , MD ha la sua nella retta RQR' , ed i segmenti di due linee hanno le icnografie nei segmenti delle icnografie di esse medesime; adunque i segmenti R , R' saranno le icnografie dei due punti anzidetti della linea dell'ombra in quistione, e conseguentemente i punti r , r' , i quali sono nella retta KG e nelle Rr , $R'r'$ parallele alla AM , apparterranno all'ortografia dimandata; ciò che voleva dimostrare.

COROLLARIO 1. I punti R , R' , - costituiscono l'icnografia della linea dell'ombra portata dalla stessa retta $AB - CL$ sulla superficie di rotazione.

COROLLARIO 2. Presa $AS = MD$, congiunta SfP e tirata l'orizzontale $f\nu$, si avrà nel segmento ν il punto più alto dell'ortografia dimandata.

COROLLARIO 3. Per essere $QR = QR'$, sarà O il punto di mezzo della corda rr' , o sia sarà νP un diametro dell'ortografia descritta; e però delineata la parte di essa che trovasi da una parte della νOP , facilissimamente si potrà descrivere l'altra anche senza usare la regola esposta.

COROLLARIO 4. Se la retta data, oltre di essere orizzontale, sarà anche parallela al piano ortografico, le NP , MD cadranno nelle AP , MP , e la RR' (tav. XI, fig. 97) risulterà perpendicolare alla MP , e però parallela ed eguale alla rr' .

In questo caso la retta AK , colla quale si confonde il diametro NO , segherà l'ortografia dimandata in due parti eguali perfettamente, anzi sarà essa un suo asse, e le distanze Kr , Kr' , le quali saranno eguali amendue alla QR , avranno i loro quadrati eguali

al quadrato della MR , meno quello della MQ ; cioè sarà il quadrato di ciascuna delle rette Kr , Kr' eguale a quello della GK , meno il quadrato della Km che rappresenta la distanza che ha il punto $K-Q$ dalla AM asse della superficie di rotazione.

Ma facendo $am = GK$, e $Kr = Kr' = Ka$, si ha

$$\overline{Kr}^2 = \overline{Kr'}^2 = \overline{Ka}^2 = \overline{am}^2 - \overline{Km}^2 = \overline{GK}^2 - \overline{Km}^2;$$

adunque i punti r , r' , ecc.

Quindi segata AS eguale alla MD , cioè alla distanza che ha la retta obbiettiva dal piano ortografico, ed unito S al punto P , ovvero fatto l'angolo ASP eguale al complemento di Γ ; e poscia tirate le CK , FI , -- perpendicolari alla AM , e segate le ma , nb , -- eguali alle GK , FI , -- e le Kr , Is , -- eguali alle Ka , Kb , --, avransi i punti r , s , -- dell'ortografia dimandata, senza ricorrere all'icnografia della retta obbiettiva.

Segando $Kt = Km$, $Iu = In$, -- e facendo centro successivamente nei punti t , u , --, e coi raggi eguali alle GK , IF , -- descritti degli archetti che seghino le stesse $r'G$, $s'F$, --, i segmenti saranno gli stessi punti r , r' , s , -- dell'ortografia dimandata, e trovati altrimenti poc' anzi.

Nell'ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione che fissano generalmente i disegnatori, essendo l'angolo SPA semiretto, i punti t , u , -- cadranno tutti nel P .

Quindi, fatta AP eguale alla AS , condotte le orizzontali $s'F$, $r'G$, -- e descritti gli archetti r , r' , s , s' , --, facendo centro in P , e con un raggio, pei primi due eguale alla KG , pei due seguenti alla IF , ecc., avransi in un tratto i punti dell'ortografia dimandata.

OSSERVAZIONE I. Se la retta che porta l'ombra sarà la $VB-vb$ (tav. IX, fig. 98) comunque posta nello spazio, primieramente si condurranno Vv , Ff , Bb parallele alla AH asse di rotazione della superficie, la FT parallela alla O , la ft alla I , la Tt alla Vv ; indi si congiungerà la vt , e si condurranno le rette mb , BA , la prima parallela alla vt stessa, e la seconda alla VH o sia orizzontale: fatto ciò, si determinerà, colla regola esposta, l'ortografia dell'ombra portata sulla superficie di rotazione dalla retta orizzontale $AB-mb$, qui determinata, e si avrà in essa la stessissima ortografia dell'ombra portata sulla medesima superficie dalla retta $VB-vb$, comunque posta nello spazio.

Imperciochè essendo v l'incontro della retta $VB-vb$ col piano icnografico, e t quello della parallela ai raggi di luce che passa pel punto $F-f$ della stessa $VB-vb$, la retta vt sarà la traccia icnografica del piano di queste due rette; e però, siccome $AB-mb$ ha il punto $B-b$ in questo piano ed è parallela alla vt , sarà essa un'orizzontale situata nel piano delle medesime $VB-vb$, $FT-ft$, cioè nel piano che passa per la data retta $VB-vb$ ed è parallelo ai raggi di luce.

Ma le ombre portate dalle linee situate in un medesimo piano parallelo ai raggi di luce cadono tutte nel piano stesso; adunque le ombre portate dalle rette $VB-vb$, $AB-mb$, le quali sono in uno stesso piano parallelo ai raggi di luce, coincideranno fra loro; e conseguentemente l'ortografia dell'ombra che porta l'orizzontale $AB-mb$ sulla superficie di rotazione, determinata colla regola esposta, sarà la stessissima ortografia dell'ombra portata sulla medesima superficie dalla retta $VB-vb$, comunque situata nello spazio, come ho asserito.

Ad esempio. Se la retta che porta l'ombra fosse la $MD-PN$ (fig. 96) che incontra l'asse in $M-P$, condotta la DN parallela all'asse, le NI , DH , HI parallele rispettivamente alle O , I , AM , congiunta PIB , e dal punto B comune all'orizzontale ANB tirata la verticale BL , indi unita LDC , si avrebbero nella AB l'ortografia, e nella CL l'icnografia di una delle rette orizzontali che portano sulla superficie l'ombra stessa cagionata dalla $MD-PN$.

COROLLARIO 5. Così, se la retta dalla quale viene portata l'ombra sarà la parallela all'asse che passa per T (tav. X, fig. 99), colla retta TL parallela alla I si confonderanno tutte le rette analoghe alla RR' della figura novantesimasesta; quindi descrivendo l'archetto R col centro M ed il raggio eguale all'orizzontale DH , e tirando la Rr parallela all'asse, si avrà in r un punto dell'ortografia dimandata.

In questo caso, fatto $MP = MT$, e tirate le Tt , PG parallele alla ME , e la Gt orizzontale, in t segmento delle due Tt , Gt si avrà un termine dell'ortografia dell'ombra; e segata MZ eguale alla MS perpendicolare alla TL , e condotte le Zf , Sv parallele alla ME , e la fv orizzontale, sarà questa retta orizzontale tangente nel punto sublime dell'ortografia di cui si parla, e propriamente in v .

COROLLARIO 6. In ultimo, cadendo la retta obbiettiva suddetta nell'asse stesso di rotazione (fig. 100), per avere l'ombra portata da essa retta sulla parte concava della superficie; tirata la EH orizzontale e la EF parallela alla I , si condurranno le orizzontali CG , BI , --, e ad esse seghe- ransi le parti EF , EA , -- eguali rispettivamente, indi si condurranno le FP , AN , -- parallele all' EC asse, ed avransi immediatamente in P , N , -- dei punti dell'ortografia dimandata; siccome è per sè stesso evidente.

OSSERVAZIONE 2. Se la superficie di rotazione sarà la conica, che ha per ortografia $ABCF$ (fig. 101), e che la retta ST analoga alla SP della figura novantesimasesta, prolungata sufficientemente, seghi la AF , l'ortografia dell'ombra portata sulla medesima superficie dalla retta orizzontale avente AB per ortografia ed una distanza eguale alla GS dalla GD asse del cono, sarà un arco ellittico di cui facilmente si potranno determinare i suoi termini e gli assi col metodo seguente:

Si trovi il punto M di mezzo della fT , si tirino dai punti f , V , M e T le fv , LVE , $tMPs$, TQ perpendicolari alla DG , e dall' M anche la verticale MN ; si faccia $PN = Ps$; indi $Pr = Pt = MN$, e saranno L ed E i due termini dell'arco ellittico, ed anche i due punti di contatto fra le rette AF , BC e l'ortografia LvE , ed rt , Qv i due assi dell'ellisse di cui sarà parte l'ortografia medesima.

Quindi questa linea non solo si potrà descrivere colle regole esposte qui sopra, ma anche colle notissime, colle quali descrivonsi comunemente le periferie ellittiche, allorchè si conoscono i loro assi.

PROPOSIZIONE XXXIX.

Data l'ortografia DAB (fig. 102) di una superficie di rotazione che ha l'asse AGM verticale, e date l'ortografia ed icnografia di una linea qualunque, trovare l'ortografia dell'ombra portata da questa linea sulla superficie medesima.

Al solito, sia ML l'asse comune ai piani ortografico ed icnografico.

Si trovi la traccia KNF icnografica della superficie involvente, lemma primo, indi conducasi l'orizzontale DGB , la GQ parallela alla O , la MO alla I , e la QO perpendicolare alla ML , e descrivansi gli archetti N, F , facendo centro in O e col raggio eguale alla semicorda BG ; tirinsi NP, FL perpendicolari anch'esse alla ML , e le PH, LI parallele alla GQ , e saranno H, I due punti dell'ortografia richiesta.

Essendo GQ parallela alla O , MO alla I ed OQ alla MA , sarà O il centro della periferia circolare traccia icnografica della superficie cilindrica avente le rette generatrici parallele alla $O-I$, e per una direttrice la sezione fatta alla superficie di rotazione dal piano orizzontale che passa per la BD ; e però i punti N, F comuni a questa traccia circolare ed anche alla KNF apparterranno alle rette generatrici comuni alla detta superficie cilindrica ed all'involvente. Ma i punti H, I sono nelle PH, LI ortografie di queste rette generatrici e nella BD ortografia, ecc.

COROLLARIO. Se la linea obbiettiva sarà una periferia circolare ed orizzontale, si potrà determinare l'ortografia dimandata in un modo affatto simile a quello usato nella proposizione trentesimaquarta.

OSSERVAZIONE OTTAVA.

Se le superficie di rotazione non saranno disposte, come ho supposto nelle proposizioni trattate, si troveranno le proiezioni ortogonali, fatte su due piani, condotti l'uno per l'asse di rotazione, e l'altro perpendicolare al medesimo, delle ombre portate sopra di esse superficie; indi colla regola esposta ed usata nella proposizione decimaterza della parte antecedente si otterranno l'ortografia e l'icnografia delle medesime. Altrettanto si dica per le altre superficie.

DE' CONTORNI

DELLE OMBRE PORTATE SULLE SUPERFICIE SPIRALI.

PROPOSIZIONE XL.

Trovare l'ortografia dell'ombra che porta una linea qualunque sulla superficie delle colonne spirali, conoscendosi l'ortografia e l'icnografia della linea medesima e la superficie, come nella proposizione duodecima della seconda parte.

Sia ABC - - (fig. 103) l'icnografia ed abc - - l'ortografia della direttrice o sia della linea nella quale vi sono i centri delle sezioni orizzontali della superficie della colonna.

Si descriva DEF traccia icnografica della superficie cilindrica che ha le rette generatrici parallele ai raggi di luce e che passa per la linea obbiettiva, *lemma primo*: fatto questo, tirisi Bb perpendicolare ad NbP parallela alla ML asse, le bH , Bh parallele rispettivamente alle O , I , e la hH anch'essa perpendicolare all' LM ; indi descrivansi gli archetti D , E col centro h e col raggio eguale a quello della sezione orizzontale della colonna che ha il centro $B - b$; si facciano le DL , EM perpendicolari alla LM , e poi le LN , MP parallele alla Hb , ovvero seghinsi $bN = LH$, e $bP = HM$, ed avransi in N , P due punti dell'ortografia dimandata.

Pel punto h si conduca lm parallela alla LM .

La linea che rappresenta sulla superficie della colonna l'ombra portata dalla data, essendo nella superficie cilindrica che ha le rette generatrici parallele ai raggi di luce e per traccia icnografica la linea DEF , cioè nell'attuale superficie involvente, sarà essa linea l'intersecazione di queste medesime due superficie; così, per essere le bH , Bh parallele rispettivamente alle O , I , e le Bb , hP perpendicolari alla LM , il punto h sarà l'incontro del piano icnografico colla parallela ai raggi di luce che passa pel punto $B - b$.

Si supponga che il piano icnografico od almeno la sua porzione in cui vi sono i punti D , E , h , M , H ed L si muova, conservandosi orizzontale, senza fare verun moto di rotazione, più che il punto h , fisso in esso piano, percorra la retta $Hb - hB$: egli è evidente che la linea DEF genererà, movendosi in tal maniera, la stessissima superficie involvente. Giunto che sarà il punto h nel $B - b$, la retta lm confonderassi colla parallela alla LM che passa per $B - b$ ed ha per ortografia NP , la DEF colla sezione fatta alla superficie involvente dal piano orizzontale che passa per la NP stessa; e la periferia di cui sono parti gli archetti D , E cadrà nell'intersecazione fatta da questo piano orizzontale alla superficie della colonna; e però i punti D , E comuni ad ambedue queste linee, e per conseguenza alla superficie della colonna ed alla involvente, saranno, in questa loro nuova situazione, nella linea medesima che rappresenta sulla superficie della colonna l'ombra di cui si parla; quindi i punti N e P , per essere i piedi delle perpendicolari tirate da questi due punti al piano ortografico, apparterranno all'ortografia dimandata; ciò che volevasi dimostrare.

OSSERVAZIONE. Se l'obbiettiva $ABC - abc$ fosse quella determinata nella proposizione duodecima della parte seconda, la linea delineata qui sopra rappresenterebbe l'ortografia di un estremo della stessa ombra cadente sulla superficie della colonna spirale; e questa linea e quella sarebbero le sole che bisognerebbe delineare, volendo ombreggiare il disegno ortografico della colonna stessa.

PROPOSIZIONE XLI.

Data la generatrice e la direttrice di una superficie spirale, ed un' altra linea qualunque, trovare l' ortografia dell' ombra che cagiona quest' ultima linea sulla superficie stessa; supposto che l' elice direttrice sia ordinaria ed abbia l' asse verticale, come nella proposizione anzicitata.

Si costruisca una individuata sezione orizzontale della data superficie, per esempio, quella esistente nel piano orizzontale condotto per la retta bt (tav. XI, fig. 104), cioè la $FE7$, lemma trentesimoprimo, non che la GHI traccia icnografica della presente superficie involvente, lemma primo; fatto questo, dai punti D, d della Dd parallela alla Aa si tirino le Dm, dn rispettivamente parallele alle I, O ; indi la mn perpendicolare all' asse ML , e la mu parallela alla ADF ed eguale alla BE ; e poscia si faccia scorrere nel piano icnografico la linea $FE7$ in guisa che il punto B passi in m , e la retta BE nella mu , e sia essa curva in questa novella posizione rappresentata dalla CuH ; e dai punti G, H comuni a questa nuova linea ed alla traccia GHI si tirino le Gg, Hh perpendicolari alla ML : finalmente conducansi le gr, hs parallele anch' esse alla O , e nei segmenti r, s di queste coll' orizzontale rd si avranno due punti dell' ortografia richiesta.

Non espongo la dimostrazione di questa determinazione, perchè essa sarebbe una ripetizione di quella della proposizione antecedente.

COROLLARIO. Tirando pei punti r, G le rette parallele rispettivamente alle At, Dm , nel loro segmento avrassi l' icnografia di quel punto della linea dell' ombra il quale ha l' ortografia in r ; così nel segmento delle due analoghe parallele tirate pei punti s, H cadrà l' icnografia di quel punto dell' ombra portata avente l' ortografia in s .

OSSERVAZIONE 1. Se la linea 123 generatrice sarà retta, come lo è per le superficie dei filetti delle viti triangolari, si potrà determinare l' ortografia dell' ombra portata su di essa superficie dalla linea obbiettiva data nella proposizione esposta anche senza delineare la sezione orizzontale della superficie spirale, e ciò nel modo seguente:

Primieramente si descriva la traccia ortografica della superficie involvente, e poscia, supposto $to = tb$, si prenda nella AF , incominciando in A , una parte eguale alla $t1$, ed all' altro termine di questa parte si tiri la parallela alla Aa , e si unisca il segmento di questa colla ds al punto della Aa , che è distante dal punto a quanto il t lo è dal segmento fatto alla Aa stessa dal prolungamento della 123, e in questa retta congiungente si avrà l' ortografia di quella generatrice della superficie la quale ha l' icnografia nella AF : fatto ciò, trovinsi i punti dove questa generatrice e la $Dm - dn$ incontrano il piano ortografico, uniscansi questi incontri, e pei

segmenti di quest'ultima retta colla traccia anzidescritta si tirino le parallele alla O , che nei loro segmenti coll'ortografia della detta generatrice si avranno dei punti dell'ortografia dimandata.

OSSERVAZIONE 2. Se i raggi di luce saranno orizzontali, non avrà più luogo la traccia icnografica della superficie involvente; e però non sarà più buona la regola esposta per determinare l'ombra in quistione. In tal caso, per avere quest'ombra, o sia le sue proiezioni,

Delineerassi la $FE7$ come sopra, e la traccia ortografica della superficie involvente: fatto questo, si estenderà l'orizzontale ds sino a segare questa traccia ortografica, e dai segmenti, i quali saranno quei punti di essa traccia distanti dalla ML quanto lo è il d , si tireranno le perpendicolari alla stessa ML , e dai piedi di queste le parallele alla I ; ed i punti dove queste parallele segheranno, dalla parte da cui perverrà la luce, la linea $FE7$ trasportata in modo che il punto B cada in D , e la retta BE secondo la DF , apparterranno all'icnografia dell'ombra cercata; e però conducendo per questi punti delle parallele alla Aa , nei segmenti di queste rette colla $a1$ avransi altrettanti punti dell'ortografia dell'ombra medesima.

Se poi i raggi di luce, oltre di essere orizzontali, saranno di più paralleli alla Ah , bisognerà eseguire pel piano dei profili ciò che si è qui indicato per l'ortografico.

DE' CONTORNI

DELLE OMBRE PORTATE SULLE SUPERFICIE DE' CANALI.

Le linee EMF , ABC (fig. 105 e 106) sono quali si vogliono. Se l' ABC si moverà in modo che il suo piano mantengasi perpendicolare alla EMF , la retta AC sempre orizzontale, e che il punto D di mezzo della stessa AC percorra la linea medesima EMF , la curva ABC genererà una di quelle superficie le quali, siccome già dissi, si chiamano superficie de' canali.

PROPOSIZIONE XLII.

Della superficie dei canali qui individuata, e che ha per ortografia e ad un tempo per ispaccato ordinario CAXY (fig. 107), trovare l'ortografia dell'ombra portata su di essa dalle linee aventi per ortografie ANC, ABX, e situate in essa superficie.

Egli è evidente che l'ortografia richiesta dovrà essere in generale composta di due linee differenti, essendo diverse le ABX , ANC .

Descritta la sezione BG fatta alla superficie dal piano perpendicolare all'ortografico e che passa per la retta BD parallela alla O , lemma trentesimoterzo, si faccia l'angolo GBD eguale al Δ , e dal segmento G della

retta BG e della curva BG conducasi GL perpendicolare alla stessa BD , e si avrà in L il punto della linea rappresentante l'ortografia dell'ombra portata sulla superficie dal B ; così descritta la sezione RS che il piano condotto lungo la NP parallela alla O e perpendicolare all'ortografico fa alla superficie, tirata RS parallela alla BG , e dal segmento S la ST perpendicolare alla NP , sarà T un punto dell'ortografia dell'ombra portata sulla superficie dal suo contorno avente l'ortografia nella ANC .

Si faccia rotare la curva BG insieme alle rette BG , GL attorno alla BD , e di tanto che essa divenga perpendicolare al piano ortografico al di là del medesimo: in tale situazione la retta BG sarà nella parallela ai raggi di luce che passa per B , il punto G si confonderà con quello della superficie, in cui cadrà l'ombra portata dal B stesso, e la retta GL rappresenterà la perpendicolare tirata da questo punto al piano ortografico; quindi L piede di questa sarà il punto dell'ortografia dell'ombra portata dallo stesso punto B del contorno ABX .

In una maniera affatto simile si dimostra che T esprime l'ortografia dell'ombra portata sulla superficie da quel punto del contorno di essa, il quale ha N per ortografia. Facendo per tutti i punti della ABX ciò che si è fatto pel B , e per quelli aventi l'ortografia nella ANC ciò che si è fatto pel punto N , si otterrà l'intera ortografia VLZ richiesta.

OSSERVAZIONE 1. Così, facendo pel punto A quanto si è fatto pel B , avrassi in H il punto comune alle due differenti linee VH , HZ che costituiscono l'ortografia dimandata.

OSSERVAZIONE 2. Se la AC sarà verticale, descritta la linea AFE rappresentante la sezione fatta alla superficie dal piano perpendicolare all'ortografico e che passa per la AC stessa, supposto adattata al piano ortografico medesimo col rotare attorno alla AC ; e poi condotta quella tangente ad essa AFE che fa colla verticale AC l'angolo eguale al Γ , e dal punto F di contatto la VF perpendicolare alla stessa AC , in V si avrà un termine della prima parte delle due linee costituenti l'ortografia in quistione.

OSSERVAZIONE 3. Si guadagnerà assaissimo in semplicità seguendo un ordine successivo nella determinazione dei punti dell'ortografia dimandata, giacchè così facendo il giudizioso disegnatore potrà descrivere delle linee RS , BG quelle sole piccolissime porzioni in cui cadranno i segmenti S , G che gli abbisogneranno per delineare l'ortografia $VTHZ$.

Se la linea XRZ (fig. 108 e 109) si moverà in modo che il suo piano mantengasi perpendicolare all'elice LDE — Lde , la retta XZ orizzontale, e che il punto Y di mezzo della stessa XZ percorra l'elice medesima, la linea mobile XRZ genererà una superficie elicoidica, cioè una di quelle superficie che costituiscono generalmente le volte delle scale a chiocciola, e che sono anche particolari superficie de' canali.

PROPOSIZIONE XLIII.

Data l'elice direttrice di una superficie elicoidica e la linea generatrice della medesima superficie, e supposto che le tangenti l'elice siano tutte egualmente inclinate all'orizzonte, appunto come succede nelle ordinarie scale a chiocciola, trovare l'ortografia del contorno dell'ombra che accade nello spaccato fatto dal piano ortografico alla superficie medesima.

Sia CAC l'icnografia (tav. X, fig. 110) ed EAE l'ortografia dell'elice direttrice, BVL la sezione fatta alla superficie dal piano ortografico; e siano HB , BG l'ortografia ed icnografia di una parallela ai raggi di luce o sia due rette rispettivamente parallele alle O , I .

Si descriva la linea BSL traccia icnografica della superficie elicoidica, lemma trentesimoquarto, e la BTL traccia pure icnografica della superficie involvente o sia della superficie cilindrica avente le rette generatrici parallele ai raggi di luce, e per una direttrice la curva data BVL , corollario del lemma primo; tirinsi imp parallela, e le itx , mn perpendicolari all'asse ML ; indi la xy eguale alla BL e parallela anch'essa alla ML , e le rn , nd eguali, la prima alla AB , e la seconda alla AL , e che siano amendue nella normale rd della curva AC , e descrivansi le curve xvy , rvd eguali perfettamente alle BTL , BSL ciascuna a ciascuna; e pel loro segmento v conducasi vp perpendicolare alla ip , ed avrassi in p un punto dell'ortografia hpP dimandata.

Il piano orizzontale che passa per la ip sega evidentemente il contorno dell'ombra in un punto che ha l'ortografia nella medesima retta ip , e taglia le due superficie, cioè l'involvente e l'elicoidica, in due linee, la prima delle quali ha per icnografia xvy , e la seconda rvd ; e però essendo v l'icnografia del punto comune a queste due intersezioni, il quale è conseguentemente il punto anzidetto del contorno dell'ombra, la sua ortografia sarà p , punto comune alla retta ip ed alla vp condotta per la sua icnografia v e perpendicolare all'asse ML , come ho asserito.

COROLLARIO. Conducendo pel segmento s delle tracce BSL , BTL la retta sP perpendicolare alla ML , avrassi in P suo piede il punto ove l'ortografia in quistione segnerà l'orizzontale medesima ML .

OSSERVAZIONE 1. La superficie cilindrica avente le rette generatrici parallele alla tangente in A l'elice direttrice, e la curva BVL per traccia ortografica, è evidentemente tangente la superficie elicoidica stessa lungo la medesima linea BVL ; e però determinata l'ortografia dell'ombra portata su questa superficie cilindrica dalla linea BVL , proposizione undecima, nel segmento di quest'ortografia e della traccia BVL avrassi immediatamente il punto h termine superiore dell'ortografia di cui si parla, senza bisogno di delineare questa medesima ortografia.

OSSERVAZIONE 2. Siccome tutte le sezioni orizzontali della superficie involvente sono fra loro eguali ed anche alle icnografie di esse, e simili proprietà hanno le analoghe sezioni della superficie elicoidica; così le linee xvy , rvd saranno eguali alle due BTL ,

BSL, come ho supposto, ciascuna a ciascuna; e conseguentemente la determinazione del punto v riescirà semplicissima, usando uno di quei metodi notissimi ai disegnatori.

OSSERVAZIONE 3. Se le tangenti dell'elice direttrice non fossero tutte egualmente inclinate al piano icnografico, la sezione fatta alla superficie elicoidica dal piano orizzontale immaginato lungo ip non sarebbe eguale alla *BTL*; e però in tal caso bisognerebbe descrivere effettivamente la linea *rvd* icnografia della medesima sezione, cioè per ogni punto dell'ortografia richiesta converrebbe descrivere una differente linea *rvd*, ciò che rende questa regola quasi impraticabile al pari di qualunque altra che io seppi immaginare.

OSSERVAZIONE NONA.

Paragonando le varie regole esposte per delineare i contorni delle ombre portate o le loro proiezioni, ne risulta che, ommettendo le parti di esse regole esclusive alle particolari superficie considerate, ne risulta, dico, che per determinare l'ombra portata da una linea qualunque sopra qualsivoglia superficie, basta segare tanto questa superficie, quanto l'involvente con un medesimo piano, e tale che le sezioni siano facilmente descrivibili mediante le note proprietà delle due superficie medesime; giacchè nei segamenti delle linee esprimenti queste sezioni o nelle proiezioni di essi analoghe a quelle richieste dell'ombra si avranno evidentemente altrettanti punti delle linee dimandate.

OSSERVAZIONE DECIMA.

Come per le ombre proprie, così per le portate, acciocchè meno rimanga a desiderarsi, anche per queste analiticamente esporrò la soluzione generale della seguente proposizione: « *Trovare l'ombra portata da una linea qualunque su di qualsivoglia superficie* » che è in sostanza l'enunciata al principio di questa parte, cioè la proposizione più generale che si possa concepire rispetto alle ombre portate.

Supposto le linee e le superficie riferite tutte ai medesimi tre assi coordinati ortogonali, sia $F(x, y, z) = 0$ l'equazione della superficie, ed

$$f(x', y', z') = 0, \quad \varphi(x', y', z') = 0$$

siano quelle della linea che cagiona l'ombra: x, y, z esprimono le coordinate di un punto della superficie, ed x', y', z' quelle di un punto della linea obbiettiva.

Ritenuto che m, n siano le tangenti degli angoli che fanno le rette I, O colla comune ai piani ortografico ed icnografico, come nell'osservazione relativa all'iperboloide della proposizione ventesimaquinta, saranno

$$s - y' = m(t - x'), \quad u - z' = n(t - x')$$

le due equazioni della parallela ai raggi di luce e che passa pel punto dell'obbiettiva corrispondente alle coordinate x', y', z' : ammesso t, s, u le coordinate di un suo punto qualunque ed analoghe alle x, y, z .

Eliminando le x', y', z' dalle quattro equazioni

$$s - y' = m(t - x'), \quad u - z' = n(t - x'),$$

$$f(x', y', z') = 0, \quad \phi(x', y', z') = 0,$$

se ne ottiene una naturalmente della forma

$$\psi(t, s, u, m, n) = 0,$$

la quale rappresenta la superficie cilindrica che passa per l'obbiettiva, ed ha le rette generatrici parallele ai raggi di luce, vale a dire la superficie involvente. Ma la linea dell'ombra debb'essere nella superficie sulla quale si rende essa visibile, ed anche nell'involvente; adunque sarà essa data dalle due equazioni seguenti

$$F(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z, m, n) = 0;$$

x, y, z esprimono qui le coordinate di un punto qualunque della medesima linea.

OSSERVAZIONE UNDECIMA.

Nelle quistioni trattate in questa parte si è sempre supposto conosciuta insieme alla direzione dei raggi di luce la linea obbiettiva, e si sono espone le regole per delineare i contorni delle ombre corrispondenti. Se colla direzione dei raggi di luce fosse dato il contorno di esse ombre, e si volesse la linea obbiettiva, trovata la superficie cilindrica avente questo contorno per direttrice, e le rette generatrici parallele ai raggi di luce, qualunque linea situata in essa superficie cilindrica potrebbe esprimere la dimandata obbiettiva; e se quest'obbiettiva dovesse essere in una data superficie, come succede generalmente negli spaccati, essa linea sarebbe la comune sezione di questa superficie data e della cilindrica anzidetta, la quale si delineerebbe conseguentemente colle stessissime regole che si userebbero per determinare lo stesso contorno, quando fosse data la medesima obbiettiva.

OSSERVAZIONE DUODECIMA.

Così, se insieme al contorno dell'ombra portata sulle superficie considerate fosse data la linea obbiettiva, e si volesse l'opportuna direzione dei raggi di luce colle cose espone, agevolmente si otterrebbe, come si comprenderà dai seguenti esempj.

ESEMPIO PRIMO. Qual direzione dovranno avere i raggi di luce perchè l'ombra portata dalla periferia $fh - vnc$ (tav. VI, fig. 40) sulla superficie cilindrica $fhLM - anp$ sia la linea avente per ortografia la periferia ellittica $5qx$, la quale ha il centro in g , punto di mezzo della fh , ed è tangente ad amendue le verticali fM, hL ?

Dal segmento m si tiri la mt perpendicolare all'asse ML , e dal punto a la ae parallela alla tangente della periferia cnv nel segmento t ; indi tirisi ex parallela alla mt , e congiungasi il punto f all' x , ove la data periferia ellittica vien segata dalla ex ; evidentemente saranno ae , fx l'icnografia e l'ortografia della retta $ae - fx$ parallela ai raggi di luce.

ESEMPIO SECONDO. *L'ortografia del contorno dell'ombra che accade nello spaccato ordinario di una volta emisferica è espressa (tav. VII, fig. 59) dalla semiperiferia ellittica FHC concentrica al cerchio LBD, ed avente per asse maggiore il diametro FC del cerchio stesso LBD: qual direzione avranno i raggi di luce?*

Condotta la corda be perpendicolare al diametro CF , si descriva la semiperiferia circolare bge , e si tiri hg pel segmento h e perpendicolare alla corda stessa be , ed uniscasi bg ; la retta be esprimerà l'ortografia di una parallela ai raggi di luce, e gbe l'angolo fatto dalla medesima parallela col piano ortografico, cioè quello denominato Δ : l'icnografia di questa parallela ai raggi di luce si potrà avere colla regola esposta nel corollario della proposizione sciolta al paragrafo sesto della prima parte.

Se l'obbiettiva o sia la linea che cagiona l'ombra sarà una retta, infinite saranno evidentemente le direzioni che potranno avere i raggi di luce, giacchè sarà sufficiente che essi raggi siano paralleli ad una qualunque retta situata nel piano dell'obbiettiva e del contorno dell'ombra.

OSSERVAZIONE DECIMATERZA.

Siccome l'obbiettiva ed il contorno dell'ombra portata debbono essere in una stessa superficie cilindrica involvente, perchè la quistione che ha per oggetto lo scoprimento della direzione dei raggi di luce non sia impossibile a soddisfarsi; così per tutte le quistioni di tal natura e delle quali non sarà anticipatamente nota la loro possibilità, come ho supposto che fosse negli esempj anzi esposti, bisognerà incominciare la loro soluzione col decidere la loro possibilità, ciò che si farà, per le superficie di cui ho parlato in particolare, colle stesse cose esposte relativamente alla delineazione delle ombre portate su di esse, ed in generale con quello che segue; e scoperto che esse proposizioni siano possibili, si passerà poi alla determinazione della direzione dei raggi di luce colle regole esposte tutte le volte che le superficie, su cui si renderà visibile l'ombra portata, saranno di quelle particolarmente considerate, ed in generale colla regola generalissima che trovasi alla fine della presente osservazione.

Supposto sempre le linee e le superficie riferite tutte ai medesimi tre assi coordinati rettangoli, siano

$$f(x', y', z') = 0, \phi(x', y', z') = 0$$

le equazioni della linea obbiettiva come sopra, e saranno

$$s - y' = \alpha(t - x'), u - z' = \beta(t - x')$$

le due della retta che passa per quel punto dell'obbiettiva al quale corrispondono le coordinate x', y', z' , ed è parallela all'altra tirata per l'origine delle coordinate, ed espressa dalle equazioni $y = \alpha x, z = \beta x$:

x, y, z rappresentano le coordinate rettangole di un punto qualunque di quest'ultima retta, ed r, s, u le analoghe della detta sua parallela.

Eliminando le tre coordinate x', y', z' dalle prime quattro equazioni qui esposte, avrassi un'equazione

$$\Phi(t, s, u, \alpha, \beta) = 0,$$

la quale rappresenterà la superficie cilindrica avente le rette generatrici parallele alla retta data dalle equazioni $y = \alpha x, z = \beta x$, e per direttrice la stessa obbiettiva.

Così, chiamando x_i, y_i, z_i le coordinate di un punto qualunque della linea esprime l'ombra portata, saranno

$$y - y_i = \alpha(x - x_i), z - z_i = \beta(x - x_i)$$

le due equazioni della retta parallela all'espressa dalle $y = \alpha x, z = \beta x$, e che passa pel punto della linea dell'ombra a cui corrispondono le coordinate x_i, y_i, z_i ; e però eliminando x_i, y_i, z_i dalle due equazioni $y - y_i = \alpha(x - x_i), z - z_i = \beta(x - x_i)$ combinate colle due della linea dell'ombra portata, si otterrà un'equazione

$$\theta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$

la quale esprimerà la superficie cilindrica, che ha per una direttrice l'ombra medesima e le rette generatrici parallele anch'esse all'espressa dalle equazioni $y = \alpha x, z = \beta x$. Ma la possibilità della quistione richiede che la linea obbiettiva e quella dell'ombra portata siano in una medesima superficie cilindrica; adunque la quistione sarà possibile, se, mediante un'opportuna determinazione delle quantità α, β , potransi ridurre identiche le due equazioni

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \theta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

risultanti dalle suddette eliminazioni; altrimenti sarà essa quistione assolutamente impossibile, o sia immaginaria.

Ora, i valori delle α, β che renderanno identiche queste due equazioni, posti in vece di α, β nelle due $y = \alpha x, z = \beta x$, faranno conoscere le equazioni della retta condotta per l'origine delle coordinate parallelamente alle rette generatrici della superficie cilindrica espressa da una delle equazioni

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \theta(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$

e per conseguenza la stessa direzione dei raggi di luce.

PARTE QUARTA.

DEI CONTORNI DELLE OMBRE COMPOSTE.

I contorni delle ombre composte essendo formati di più contorni di ombre proprie ovvero portate, ed in generale di quelli di cui ho parlato individualmente nelle parti precedenti, onde appoggiare le regole che userò per delinearli, mi limiterò a citare i luoghi ove dimostrai i differenti passi di esse; anzi, siccome queste citazioni sarebbero moltissime, per cui spiaccerebbero, ne farò solamente alcune, quelle cioè che stimerò più utili particolarmente nelle costruzioni. Così, non potendo esporre tutte le proposizioni relative alla determinazione di essi contorni, come ho fatto per quelli delle ombre semplicemente proprie o portate, mi restringerò all'esposizione delle sole proposizioni seguenti, che scelsi fra quelle che interessano maggiormente i disegnatori.

PROPOSIZIONE I.

Data l'ortografia e l'icnografia della sagoma espressa dalla figura III, tav. XI, trovare gli estremi delle ombre che accadono su di essa e di quella che essa medesima cagiona sul piano ortografico, nell'ipotesi che la luce abbia la direzione ordinaria.

DELLE OMBRE CHE ACCADONO SULLA SAGOMA.

1. Si faccia l'angolo cbx semiretto, tirisi l'orizzontale ci , e sarà $xbci$ l'ortografia dell'ombra portata sulla gola dalla listella avente bx per ortografia.
2. Conducasi de parallela alla bc e tangente all'arco dc , e le orizzontali d_2, e_3 , ed avrassi l'ortografia $2de_3$ dell'ombra che porta la gola sopra sè stessa e sulla listella sottoposta.
3. Tirisi ef parallela anch'essa alla bc , e l' fs orizzontale, e sarà $45f_6$ l'ombra portata sul muro dalla listella anzidetta.

DELL'OMBRA CAGIONATA SUL PIANO ORTOGRAFICO.

1. Si tirino le cC, dD perpendicolari alla ML asse comune ai soliti due piani coordinati, indi le $ag, bh, ci, -- Bo, Cs, --$, che facciano angoli semiretti colla stessa ML .

2. Conducansi le verticali ohg , tnm , e dai segmenti h , m , n le orizzontali hi , mr , $n7$, e poi la verticale 78 .
3. Si descriverà l'ombra ri portata dalla linea $cd - CD$, facendo per ciascun punto di quest'ultima linea ciò che si è fatto pel punto $B - a$ onde avere g ,

L'estremo dell'ombra qui richiesta sarà pertanto $aghirmn78$.

OSSERVAZIONE. Se la sagoma fosse quella espressa dalla figura 114, condotta cr toccante l'arco ac e che faccia l'angolo semiretto colla ML , indi tirate le orizzontali $c7$, $r8$, sarà $7r$ l'ortografia dell'ombra cagionata dal toro sopra sè stesso e sulla listella. Così menata ef parallela alla cr , nell'orizzontale $f9$ avrassi l'estremo inferiore dell'ombra cadente sul muro.

Similmente, condotta cv perpendicolare alla ML , e le $a1$, $r3$, $e4$, $f5$, vt , mx , $n6$, le quali facciano anch'esse degli angoli semiretti colla ML , e la $a1$ sia anche tangente all'arco ac , e poi tirate le verticali 65 , $x43$ ed unite le orizzontali 54 , 32 , ed in fine descritto l'arco 12 , col fare per ciascun punto dell'arco $ac - vV$ quello che si è fatto pel punto $f - n$ onde avere il punto 5 , si otterrà l'estremo $a123456$ dell'ombra portata dalla sagoma sul piano ortografico.

PROPOSIZIONE II.

Data l'ortografia e l'icnografia della sagoma che esprime la figura 115. tav. XII, descrivere l'ortografia dell'ombra che cagiona sopra sè stessa, e quella portata sul piano ortografico, qualunque sia la direzione della luce.

DELL'OMBRA CHE ACCADE SULLA SAGOMA.

1. Si faccia l'angolo $ca3$ eguale al complemento di Γ , tirisi la retta ab parallela alla O , e l'orizzontale cbb ; e sarà dbb l'ortografia dell'estremo inferiore dell'ombra che accadrà sul guscio.
2. Così tirinsi le ef , eg , gfh rispettivamente parallele alle ab , ac , bb , e si avrà in ifh l'ortografia del contorno inferiore dell'ombra portata dal guscio sul muro sottoposto.

OSSERVAZIONE. Se il punto d cadrà in c o sotto del medesimo, l'estremo dbb si ridurrà alla sola retta orizzontale cb tirata pel punto c : altrettanto si dirà del punto i rispetto al g .

DELL'OMBRA PORTATA SUL PIANO ORTOGRAFICO.

1. Si tirino le tn , zp , bm , $x\theta$, hq parallele tutte alla O , e le Zs , Xy alla I , e le verticali spn , $y\theta$, indi le orizzontali pm , θq , e la verticale qr ; e saranno tn , np , pm , θq , qr altrettante parti del contorno dell'ombra richiesta.
2. Si conduca la bB perpendicolare all'asse ML , e descrivasi l'ombra θm portata dalla linea $BX - bx$, facendo per ciascun punto $B - b$ ciò che ho fatto pel punto $t - Z$ per avere l' n .

L'ombra qui dimandata sarà dunque $tnpm\theta qrax$.

PROPOSIZIONE III.

Trovare l'ortografia e l'icnografia dell'ombra che porta sopra sè stessa la base toscana (fig 116) con una porzione del fusto della colonna della parte non rastremata, non che i contorni delle ombre portate da essa sui piani ortografico ed icnografico, nell'ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione che fissano generalmente i disegnatori.

Sia ML la solita linea comune ai piani ortografico ed icnografico, ed $S - sx$ l'asse della base stessa.

DELL' OMBRA CHE LA BASE PORTA SOPRA SÈ STESSA.

1. Uniscasi la $SBAI$, e si tiri la verticale ab , che passi, estesa, pel segmento B : la retta ab , avente il termine b nella periferia ove incomincia l'imoscapo, esprimerà l'ortografia dell'estremo dell'ombra propria della porzione suddetta del fusto della colonna.
2. Conducasi BcP perpendicolare alla BS , e pel segmento C la Cc parallela alla Bb , ed avransi in $B - b$, $C - c$ i termini dell'ortografia del contorno dell'ombra portata sull'imoscapo da una porzione della retta $B - ab$: l'icnografia di questo contorno sarà la stessa retta BC , e l'ortografia la linea bc descrivibile col corollario quinto della proposizione trentesimotava della parte terza.
3. Pel segmento D tirisi Ded parallela alla Bb , e la sua parte ed sarà l'ortografia dell'estremo dell'ombra propria della listella.
4. Si faccia ej eguale alla ed , e si tirino le DJ , St parallele alla BC ed eguali alla dj , indi si descriva l'arco JF col centro t ; la retta DJ sarà l'icnografia dell'ombra portata dalla retta $D - de$ sull'anello orizzontale avente l'ortografia nella retta ef , e l'arco JF sarà quella dell'ombra portata sul medesimo anello da una porzione dell'arco che ha l'ortografia nella retta dc .

OSSERVAZIONE. L'ortografia dell'estremo dell'ombra che ha l'icnografia nella linea DJF è invisibile, perchè trovasi in un piano orizzontale.

5. Si tiri Ff parallela alla Bb , e la cg alla dj , e si descriva sì l'ortografia fg che l'icnografia FG dell'ombra portata sul toro da una porzione dell'arco $CD - cd$, proposizione trentesimaquarta della parte terza: l'arco che cagiona quest'ombra è quello la cui ortografia ha un termine in c , e l'altro nel segmento della cd e della parallela alla jd tirata pel punto f .
6. Collo stesso corollario quinto della proposizione suddetta descrivasi, incominciando in g , l'ortografia gh dell'ombra portata sul toro da una parte della retta $B - ba$; l'icnografia sarà GH porzione del prolungamento della stessa retta BG .

7. Si delinei hp ortografia, ed AH icnografia dell'estremo dell'ombra propria del toro colla regola esposta nella proposizione settima o nella osservazione quarta della proposizione decimaquarta, ambe della seconda parte; e si estenda l'icnografia sinò ad incontrare la BH , e l'ortografia la gh , ovvero la Hh perpendicolare alla LM .
8. Finalmente si tiri nu parallela alla O , uU perpendicolare alla ML , ed UN parallela alla I , e sarà N un termine dell'icnografia dell'ombra AN portata sul plinto da una porzione della - - $UA - up$, la quale si descriverà agevolmente, parte terza, proposizione seconda, osservazione prima.

L'ortografia e l'icnografia richieste saranno adunque le linee - - $abcdefghp$ - - ,
- - $BCDJFGHAN$ - - .

OSSERVAZIONE I. Taluni credono che la linea $BC - bc$, estremo dell'ombra cadente sull'imoscapo, debba essere sempre composta di tre parti appartenenti a curve di differenti specie, cioè la superiore appartenente all'estremo dell'ombra propria dell'imoscapo, la intermedia alla linea che rappresenta l'ombra portata da questa prima parte sullo stesso imoscapo, e la terza ed ultima all'ombra portata sul medesimo dalla retta $B - ab$; di modo che, secondo loro, si dovrebbero descrivere sempre in vece delle linee BC, bc due altre composte ambedue di tre parti di linee di differenti specie, e di cui le sole ultime di queste parti, cioè quelle aventi l'una un termine in C , e l'altra in c , cadrebbero nelle due BC, bc sopra descritte. Per dimostrare l'insussistenza di questa opinione, e che le linee BC, bc sono nel caso nostro rigorosamente l'una l'icnografia e l'altra l'ortografia del termine dell'ombra cadente sull'imoscapo, come ho asserito sopra nel numero secondo, incomincerò a trovare l'equazione dell'icnografia del contorno dell'ombra propria del guscio dell'imoscapo medesimo, giacchè mi valgo di essa.

Pongasi (tav. III, fig. 16) $CG = r$, $CO = a$, $MCQ = \alpha$, e si avrà

$$CH = CG\sqrt{2} = r\sqrt{2}, nH = CH \text{ sen. } \alpha = r\sqrt{2} \text{ sen. } \alpha, \text{ tang. } CGr = \frac{Cr}{CG} = \frac{Cn}{CG} = \sqrt{2} \text{ sen. } \alpha,$$

$$Gt = Gs \cos. CGr = r : \sqrt{1 + 2 \text{ sen.}^2 \alpha};$$

e però, supposto anche $SD = a$, $DB = r$ (fig. 116), e nominato R il raggio vettore della icnografia del contorno dell'ombra propria dell'imoscapo, che fa colla stessa retta SD l'angolo α , l'equazione dimandata sarà

$$R = a - r : \sqrt{1 + 2 \text{ sen.}^2 \alpha}.$$

Così, nominata x la parte della SD , intercetta fra S ed il piede della perpendicolare tirata alla medesima dal punto a cui corrispondono le coordinate R, α , si avrà

$$x = a \cos. \alpha - r \cos. \alpha : \sqrt{1 + 2 \text{ sen.}^2 \alpha}$$

per essere la medesima parte eguale evidentemente ad $R \cos. \alpha$.

Eguagliando a zero il valore di $\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)$ desunto da questo della x , si ha l'equazione

$$\frac{\left(1 + 2 \text{ sen.}^2 \alpha\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3r}{a} \text{ sen. } \alpha}{\left(1 + 2 \text{ sen.}^2 \alpha\right)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

la quale, stante che per la base toscana $3r$ è minore di a , non può essere soddisfatta che dal fattore $\text{sen. } \alpha = 0$, il quale dà $x = a - r$, e

$$\left(\frac{d^2x}{d\alpha^2}\right) = -a + 3r,$$

cioè il differenziale secondo negativo. Ma i valori dell' α , che annullano $\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)$ e rendono negativo quello di $\left(\frac{d^2x}{d\alpha^2}\right)$, corrispondono al massimo valore della x ; adunque $a - r$, che è il valore della x corrispondente a $\text{sen. } \alpha = 0$, sarà la massima ascissa dell'icnografia dell'ombra propria dell'imoscapo.

Quindi tanto questa linea, quanto l'ombra che porterebbe la sua parte superiore sull'imoscapo, cadrà dalla banda della retta BC , in cui vi è il centro S , vale a dire in uno spazio totalmente ombreggiato dal fusto della colonna, e conseguentemente l'estremo dell'ombra in quistione sarà la linea $BC - bc$, cioè quella avente per icnografia la retta BC , e per ortografia la linea bc , siccome ho asserito.

Osservazione 2. Si nomini p la perpendicolare tirata dal punto F alla SZ , e q la porzione di questa intercetta fra la stessa p ed il punto S .

Gli archi ZF , JF danno

$$p^2 + q^2 = \overline{SF}^2, (p - St)^2 + q^2 = \overline{tF}^2;$$

$$\text{e però sarà } p^2 - (p - St)^2 = \overline{SF}^2 - \overline{tF}^2, \text{ o sia } p = \frac{\overline{SF}^2 + St^2 - \overline{tF}^2}{2St};$$

ma per la base toscana ordinaria, se $SB = 12$, si ha $BD = \frac{3}{2}$, $DZ = \frac{1}{2}$, e la $de = 1$; e però SD o sia $tF = 13\frac{1}{2}$, $St = de \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$, ed SZ ovvero $SF = 14$; adunque sarà

$$p = \frac{196 + 2 - 182\frac{1}{4}}{2\sqrt{2}} = \frac{63}{16}\sqrt{2}.$$

Ponendo nell'equazione $p^2 + q^2 = \overline{SF}^2$ in vece di p , SF i loro valori, e liberando la q , si ottiene

$$q = \frac{1}{16}\sqrt{42238},$$

quantità la quale per essere maggiore di SB insegna che il segmento F cade fra il punto Z e la retta BH ; quindi, siccome la DJ o sia $St = \sqrt{2}$ è minore di

$$\sqrt{(\overline{SZ}^2 - \overline{SD}^2)} = \sqrt{14,25},$$

così l'ombra portata dall'arco $DC - dc$ cadrà parte sul piano dell'anello orizzontale, che ha fe per ortografia, e parte sul toro; appunto come ho tacitamente ammesso nei numeri quattro e cinque.

Osservazione 3. Nel numero sesto avendo descritta la linea gh come ortografia dell'ombra portata sul toro dalla retta $B - ba$, ho supposto qui pure tacitamente che la linea parallela all'ordinaria direzione della luce, e tirata pel punto $C - c$, incontrasse la parte della superficie del toro che è figurata nella sua ortografia, e superiormente all'estremo $ph - AH$ della sua ombra propria: queste due ipotesi sono anch'esse conformi alla verità, giacchè la retta ST parallela alla ML è maggiore della SA , e la distanza fra la verticale $B - ba$ ed il punto dove la superficie del toro è incontrata la prima volta dalla parallela all'ordinaria direzione della luce, e che passa pel punto $C - c$, è minore della retta BH .

Di fatto, per le dimensioni ordinarie della base toscana, ammesso ciò che ho detto nella osservazione antecedente, si ha $ZA = \frac{5}{2}$, e però $SB/\sqrt{2}$ o sia $ST = 12/\sqrt{2}$, $SA = 16\frac{1}{2}$;

ma $12/\sqrt{2}$ è maggiore di $\frac{33}{2}$, giacchè 288 quadrato di $12/\sqrt{2}$ è maggiore di $272\frac{1}{4}$ quadrato di $16\frac{1}{2}$; adunque ha luogo, come ho supposto, la prima delle dette due ipotesi.

Per dimostrar l'altra, s'immagini la periferia orizzontale che ha il raggio eguale ad $SZ + \frac{2}{3} ZA$, cioè a $\frac{47}{3}$, ed è situata nella superficie del toro superiormente al piano orizzontale che sega la superficie stessa in due parti eguali: il piano di questa periferia sarà incontrato dalla retta $B-ba$ nel punto che ha per icnografia B , e dalla detta parallela ai raggi di luce in un punto che avrà l'ortografia nella stessa BT , e la cui distanza dal B stesso sarà eguale alla BC , o sia

$$\sqrt{(\overline{SD}^2 - \overline{SB}^2)} = \frac{1}{2} \sqrt{153},$$

insieme all'altezza che ha il punto $C-c$ sul piano orizzontale medesimo moltiplicata per $\sqrt{2}$, cioè sarà eguale ad

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{153} + \left(de + AZ - \frac{AZ}{3} \sqrt{5} \right) \sqrt{2} = \\ \frac{1}{2} \sqrt{153} + \frac{7}{2} \sqrt{2} - \frac{5}{6} \sqrt{10}, \end{aligned}$$

quantità minore di 10; e l'icnografia della stessa periferia segnerà la BH ad una distanza dal medesimo punto B eguale a

$$\sqrt{\left\{ \left(SZ + \frac{2}{3} ZA \right)^2 - \overline{SB}^2 \right\}} = \sqrt{\left(\frac{47^2}{3^2} - 12^2 \right)} = \frac{1}{3} \sqrt{1013},$$

quantità maggiore di 10. Quindi la prima di queste due distanze sarà minore della seconda.

Ma la distanza fra la verticale $B-ba$ ed il primo incontro della suddetta parallela ai raggi di luce è evidentemente minore della prima di queste due distanze; ed all'opposto le distanze fra il punto S e quelli dell'icnografia AH intercetti fra il punto A e la retta ST sono esse maggiori di

$$SZ + \frac{ZA}{\sqrt{2}}, \text{ e molto più di}$$

$$SZ + \frac{2}{3} AZ = \frac{47}{3},$$

e però della seconda delle medesime due distanze. Adunque la distanza fra la retta $B-ab$ ed il primo incontro della parallela all'ordinaria direzione della luce, e che passa pel punto $C-c$, sarà anch'essa minore della BH ; ciò che volevasi dimostrare.

DELL'OMBRA PORTATA SUL PIANO ICNOGRAFICO.

Si trovino le linee IK , KE esprimenti le ombre portate dalle rette $I-in$, $IN-n$, la EO portata dalla curva $UH-uh$, la OP che porta la parte superiore della retta verticale $B-ab$; indi si tiri Pr perpendicolare alla OP ed eguale alla SB , e col centro r si descriva il quadrante circolare $PQ--$; la linea $IKEOPQ$ rappresenterà l'estremo dell'ombra di cui si parla.

OSSERVAZIONE. L'ombra che cadrebbe al di là della retta Sr , egli è evidente che sarebbe eguale perfettamente all'anzidescritta; quindi facilissimamente descrivibile.

DELL'OMBRA CHE PORTA LA STESSA BASE SUL PIANO ORTOGRAFICO.

Determininsi le rette 65, 54, 32, l'arco ellittico 21 e la curva 43, che esprimono le ombre portate dalle rette $I-in$, $IN-n$, $A-ba$, dall'arco circolare $azm-BM$, e dalla curva $UH-uh$; e si avrà nella 654321, composta di esse parti, l'ombra qui richiesta.

Concludesi pertanto che nel piano ortografico si dovrà ombreggiare lo spazio

654321 *abcdefghijklmnopqrstuvwxyz* --,

e nell'icnografico

QPOLEKINAHGCFJDCBM --:

ammesso sempre che questi piani siano affatto staccati l'uno dall'altro, giacchè se fossero uniti, come nella figura che si ha sott'occhio, si ombreggerebbe dell'ortografico la sola parte superiore alla ML , e dell'icnografico l'inferiore alla medesima, siccome è evidente.

PROPOSIZIONE IV.

Descrivere i contorni delle ombre che l'abaco porta sull'ovolo, e l'ovolo sopra sè stesso.

Sia $DEKP$ (fig. 117) l'ortografia dell'ovolo, AQB quella dell'abaco posto sull'ovolo medesimo; cioè $AEPQB$ esprima l'ortografia dell'abaco e dell'ovolo, uniti fra loro, come si trovano comunemente, e sia disegnata quest'ortografia nel piano che passa per l'asse di rotazione dell'ovolo medesimo.

DELL'OMBRA CHE PORTA L'ABACO SULL'OVOLO.

Si conduca SR asse dell'ovolo, si faccia l'angolo SAR eguale a quello compreso da una delle facce orizzontali dell'abaco e dal piano parallelo ai raggi di luce e che passa per lo spigolo dell'abaco stesso, che ha per ortografia AQ , vale a dire al complemento di Γ ; conducansi le rette F_1 , G_2 , H_3 , - - parallele alla AQ , e coi centri L , M , N , - - e raggi Fl , Gm , HN , - - si descrivano gli archetti circolari p , q , r , - -, prendansi le rette l_1 , m_2 , n_3 , - - eguali rispettivamente alle lp , mq , nr , - -, ed i punti 1, 2, 3, - - apparterranno all'ortografia b_2ce del contorno dell'ombra portata dall'abaco ASQ sull'ovolo sottoposto DEP , qualunque sia la direzione dei raggi di luce e la linea DFE .

Sebbene questa regola sia un'applicazione del corollario quarto della proposizione trentesimottava della terza parte, nulladimeno espongo la seguente dimostrazione di essa per renderla affatto indipendente da qualunque altra.

S'immagini il piano orizzontale lungo la retta G_2 , la sezione di esso piano e dell'ovolo sarà un circolo che ha il centro in m ed il raggio eguale alla Gm .

La periferia di questo circolo orizzontale segnerà in due punti l'estremo dell'ombra che porta l'abaco sull'ovolo: alla determinazione delle ortografie di questi due segmenti dirigerò particolarmente i ragionamenti che seguono.

Essendo questi due segmenti e nel piano del cerchio orizzontale ed in quello parallelo ai raggi di luce, e che passa per lo spigolo dell'abaco avente AQ per ortografia, la corda che gli unisce sarà nella sezione di questi due piani, e per conseguenza parallela allo stesso spigolo dell'abaco, perchè le sezioni che un piano fa a due altri fra loro paralleli, come sono qui gli orizzontali della faccia superiore dell'abaco e del cerchio orizzontale, sono rette parallele; ed essendo lo spigolo dell'abaco parallelo alla sua ortografia AQ al pari delle rette G_2 , --, la corda medesima sarà parallela anch'essa a questa retta F_2 , per esserlo allo spigolo stesso.

Sia unito con una retta il punto di mezzo della corda al centro m , e questa risulterà perpendicolare alla corda stessa ed alla sua parallela G_2 , e però anche al piano dell'ortografia, essendo essa retta nel piano del cerchio orizzontale.

Questa retta, che congiunge il punto di mezzo della corda al centro, risultando perpendicolare al piano ortografico, insegna che il punto m esprime l'ortografia del punto di mezzo della corda medesima. Ma la corda debbe avere la sua ortografia nella retta G_2 , ed eguale a sè stessa, essendo essa corda nel piano del cerchio orizzontale e parallela alla G_2 ; adunque le ortografie de' suoi termini cadranno nella G_2 , e ad una distanza dal punto m eguale alla metà della corda medesima.

Il quadrato di ciascuna di queste due distanze eguagliando quello della metà della corda, sarà, come lo è quello della metà di questa corda, eguale al quadrato del raggio del cerchio orizzontale, meno quello della retta che unisce il suo centro al punto di mezzo della corda stessa; vale a dire i due punti comuni alla periferia del cerchio orizzontale ed al contorno dell'ombra in quistione, cioè i due suddetti segmenti, hanno le loro ortografie nella retta G_2 , e ad una distanza dal punto m , il cui quadrato eguaglia quello del G_2 , raggio del cerchio orizzontale, meno il quadrato della retta che unisce il centro del medesimo cerchio al punto di mezzo della sua corda avente i termini nei medesimi segmenti.

Immagino ora un secondo piano perpendicolare alla AQ , e che passi per l'asse SR , le sezioni di questo piano coi quattro dell'ortografia, del cerchio orizzontale, della faccia superiore dell'abaco e di quello parallelo ai raggi di luce e che passa lungo lo spigolo dell'abaco, e che ha AQ per ortografia, costituiranno evidentemente un trapezio, i cui lati paralleli saranno le due rette tirate pei punti S ed m perpendicolarmente al piano ortografico, e conseguentemente perpendicolari anche all'asse RS dell'ovolo.

Il secondo di questi due lati paralleli, cioè quello che ha un termine in m , è evidentemente la stessissima retta che congiunge il centro del cerchio orizzontale al punto di mezzo della sua corda suddetta.

Il piano qui immaginato sarà perpendicolare a quello spigolo dell'abaco avente la retta AQ per ortografia, per esserlo alla AQ medesima; e però l'angolo del trapezio opposto all'altro suo avente il vertice in m sarà lo stesso angolo *diedro* compreso dal piano inferiore dell'abaco e da quello parallelo ai raggi di luce passante per l'anzidetto spigolo dell'abaco medesimo; quindi quest'angolo del trapezio eguaglierà anch'esso l' MAS .

Questo trapezio, col rotare attorno al suo lato Sm , si adatti al piano ASG ; ed i suoi lati paralleli, per essere perpendicolari all'asse Sm di rotazione, cadranno secondo le rette AS , mG perpendicolari alla stessa Sm ; ed essendo il punto S nell'asse dell'ovolo, il lato del trapezio trovantesi nel piano inferiore dell'abaco sarà eguale alla metà di AQ ; e però il vertice di quell'angolo del trapezio, il quale è opposto all'altro

angolo del medesimo avente il vertice in m , cadrà precisamente in A ; e per essere il medesimo angolo eguale alla MAS , come si è dianzi veduto, l'altro suo lato cadrà secondo la retta AM ; e però il trapezio di cui si è parlato sino ad ora, e l'altro $AMmS$, coprendosi, saranno perfettamente eguali; quindi il lato Mm di quest'ultimo eguaglierà quello dell'altro che ha un termine in m , e l'altro nel punto di mezzo della corda del cerchio orizzontale sovra nominata.

Ora il triangolo Mmq rettangolo in m dà il quadrato della mq eguale a quello della Mq meno quello della Mm ; e perciò in virtù della costruzione sarà il quadrato di una delle rette m_2 eguale a quello della Mq o sia Gm meno quello della Mm , cioè al quadrato del raggio del cerchio orizzontale meno quello della retta che unisce il centro del medesimo cerchio al punto di mezzo dell'anzidetta sua corda; e pertanto 2, 2 saranno le ortografie dei due punti dell'estremo dell'ombra in quistione, nei quali è desso segato dalla periferia anteriore del cerchio orizzontale che ha il centro in m ed il raggio eguale alla Gm .

Ma quanto ho detto di questi due punti del contorno dell'ombra portata dall'abaco sull'ovolo vale indistintamente per tutt'i punti del contorno medesimo; adunque i punti 1, 1, 2, 2, 3, 3, -- determinati colla regola esposta appartengono, come ho superiormente dichiarato, all'ortografia b_2k_3c del contorno dell'ombra che porta l'abaco sull'ovolo; ciò che volevasi dimostrare.

OSSERVAZIONE. Tutto ciò che ho qui esposto e dimostrato rispetto all'ortografia del contorno dell'ombra che porta l'abaco sull'ovolo, nell'ipotesi dei raggi di luce paralleli, si estende anche al caso molto più generale dei raggi di luce concorrenti ad un punto, purchè al piano parallelo ai raggi di luce e che passa lungo lo spigolo dell'abaco avente per ortografia AQ s'intenda sostituito quello il quale passa per lo spigolo medesimo e pel punto a cui concorrono i raggi stessi: sostituzione che non apporta cambiamento veruno nè alla regola, nè alla dimostrazione qui data di essa.

Si concluda pertanto che la regola esposta vale, siano i raggi di luce o paralleli o concorrenti, e qualunque sia la linea DGE generatrice della superficie dell'ovolo, e che con essa trovansi i punti del contorno dell'ortografia dell'ombra portata dall'abaco sull'ovolo senza descrivere veruna icnografia, ciò che lo rende pregevolissima.

Quando i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, l'angolo MAS o sia il complemento di Γ sarà semiretto, e però per sè stesso determinato. In questa medesima ipotesi i punti 2, 2 saranno nell'arco circolare avente il centro in R segmento delle rette AR , RS , ed il raggio eguale alla Gm ; i due 3, 3 nell'arco che ha il centro nel medesimo punto R , ed il raggio eguale alla Hn , ecc.: questa regola, ammirabile per la sua semplicità, risulta dal corollario quarto della proposizione ultimamente citata.

DELL' OMBRA CHE PORTA L' OVOLO SOPRA SÈ STESSO.

La superficie curva dell'ovolo essendo la porzione di quella di un toro compresa fra due piani paralleli alle facce piane dello stesso toro, le regole esposte e dimostrate per determinare l'ortografia del contorno dell'ombra propria di questo serviranno anche per trovare l'ortografia $abcd$ del contorno dell'ombra che porta l'ovolo sopra sè stesso.

OSSERVAZIONE. Disegnata la curva b_2k_3c , e tirata per A la retta parallela alla O , basterà descrivere del contorno in quistione la parte bc e la af compresa fra il punto di contatto a e questa retta medesima; giacchè le rimanenti due parti del contorno dell'ombra propria del toro saranno evidentemente coperte dall'ombra portata dall'abaco sull'ovolo medesimo.

Similmente, siccome la parte della linea b_2k_3c cadente sotto bc descriverebbesi inutilmente, e cadono sicuramente sotto la curva bc tutti i punti della b_2k_3c che hanno dalla AP una distanza maggiore di quella che possono avere da essa AP i punti dell'ortografia

$abcd$; così l'ultima delle rette F_1, G_2, H_3 , -- dovrà essere quella avente dalla medesima AP una distanza al più eguale alla massima che avranno i punti della curva $abcd$.

Nell'ipotesi ordinaria rispetto alla direzione della luce il quadrato di LJ (tav. III, fig. 16), cioè della massima distanza che possono avere dal piano icnografico i punti dell'ortografia del contorno dell'ombra propria del toro, è eguale al doppio di quello della corrispondente GJ ; e però condotta pel punto di mezzo dell'arco DaE (fig. 117) la perpendicolare al prolungamento della EK , e congiunto il punto d'incontro loro al centro dell'arco stesso, e dal segmento di quest'ultima retta e dall'arco medesimo DaE tirata la parallela alla AQ , sarà questa evidentemente la retta più distante dalla AP , che fra le parallele F_1, G_2, H_3 , -- dovrassi condurre per determinare i punti della curva b_2k_3c .

In questa medesima ipotesi, risultando l'angolo MAS semiretto, il suo lato AM coinciderà colla suddetta parallela alla O tirata pel punto A ; più le parti del contorno in questione che hanno per ortografia be, af , essendo evidentemente eguali fra loro, descritta che si avrà l'ortografia bc e l'icnografia corrispondente, con una delle regole esposte, parlando dell'ombra propria del toro, delineerassi l'ortografia fa facilissimamente coll'osservazione seconda della proposizione settima della seconda parte.

PROPOSIZIONE V.

Trovare l'ortografia del contorno dell'ombra che il capitello toscano (fig. 118) porta sopra sè stesso, e l'estremo dell'ombra portata dal medesimo sul piano ortografico, nell'ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria.

Sia ML l'asse comune ai piani ortografico ed icnografico, e $B - b_4$ l'asse del capitello medesimo.

DELL'OMBRA CHE PORTA SOPRA SÈ STESSO.

1. Si determini $5y\alpha$ ortografia dell'ombra che porta la cimasa sull'abaco, non che le linee h_4u, ahu, AHU esprimenti i contorni delle ombre portate dall'abaco sull'ovolo, e dall'ovolo sopra sè stesso, proposizione antecedente.
2. Nell'asse del capitello si prenda $3b = BM$, e col centro b e col raggio $3b$ descrivasi l'arco de intercetto fra l'orizzontale dn e l' he tirata dal segmento h parallelamente alla O . Così si seghi $nc = BP$, col centro c e col raggio cn facciasi l'arco gl intercetto fra il prolungamento della im e la dl parallela anch'essa alla im ovvero alla O , passante pel segmento d . Quando sarà $MP = n_3$, il punto c cadrà in b .
3. Facciasi l'angolo CBL semiretto, tirinsi QT tangente la periferia QP , le Qq, Tt parallele alla Bn , e dal segmento t la tq parallela alla O , e si otterrà il punto q .

4. Si descriva l'ortografia $e\lambda$ dell'ombra portata sulla listella μk da una parte della linea $HS---hs---$, osservazione seconda, proposizione sesta, parte terza; indi si tiri $s\lambda r$ parallela alla O , ed sS, rR alla B_4 ; e trovinsi le linee lr, rq ortografie delle ombre portate sul fregio dall'arco circolare $d\lambda---NC$ e dalla linea $ST-st$, osservazione anzi citata.
5. Tirinsi dai segamenti e, l, k, j le rette $em, l\theta, k\mu, j\xi$ parallele tutte alla $f\lambda$, ed avransi i punti m, θ, μ, ξ .

Sebbene gli archi $\mu m, \theta\xi$ si possano con facilità descrivere esattamente, per essere i profili degli stessi archi aventi ek, lj per ortografie; ciò non ostante si potranno figurare colle due rette che uniscono i loro termini, perchè sono cortissimi.

OSSERVAZIONE. Condotte MA, PN parallele alla I , le Aa, N_2 alla B_4 ; indi le $a\mu, 2\xi$ alla O , avransi immediatamente i punti μ, ξ senza descrivere le linee $e\lambda, lj---$.

Concludesi pertanto che i contorni dell'ombra cadente sulla listella sottoposta all'ovolo saranno $---\mu mf---$, $---dek\lambda$, e quelli dell'ombra che cade sul fregio del medesimo capitello $---\xi\theta glrqp---$.

DELL' OMBRA PORTATA SUL PIANO ORTOGRAFICO.

Pei segamenti y, u siano tirate le yz, uv parallele alla O ; per gli u, v le uU, vV parallele alla $4B$, e pel punto X la XZ alla I .

Le linee che portano gli estremi di quest'ombra sono $YL-\beta, Y-\alpha\beta, Zy-za, X-yx, VX-vx, UT-ut, Q-qp, PRQ-7p$: le ombre portate dalle prime cinque e dalla penultima determineransi colla regola già più volte usata; e quelle cagionate dalle $UT-ut, PRQ-7p$ mediante l'osservazione prima della proposizione seconda della parte antecedente.

OSSERVAZIONE. Vi sono dei capitelli toscani, le cui parti sono tali che l'ombra cagionata dall'ovolo cade interamente sul fregio; ve ne sono degli altri, pei quali l'ombra medesima è portata porzione sul fregio, e porzione sulla listella sovrapposta ad esso; ed alcuni se ne trovano, in cui si verifica quanto ho supposto tacitamente nella soluzione della proposizione proposta, pei quali cioè l'ombra portata dall'ovolo e dall'abaco cade parte sulla listella, parte sul fregio, e parte sul piano ortografico. Per delineare i contorni di queste ombre, qualunque sia per essere il caso che possa succedere, si potranno incominciare le operazioni, come se dovesse aver luogo il terzo, quello cioè da me estesamente considerato; giacchè dalle operazioni necessarie per questo si concepirà agevolmente non solo quale di essi effettivamente avrà luogo, ma anche le poche modificazioni che dovranno fare alle regole stesse onde avere il contorno richiesto.

PROPOSIZIONE VI.

Conoscendosi le ortografie $rEFn$, $MBCL$ (tav. XIII, fig. 119) e le icnografie $RNLM$, AHD di una listella e di una goccia conica unite insieme, come si trovano ordinariamente, descrivere nel piano ortografico la linea $abcdeAfgh$, le cui parti ab , Af , fg , gh sono gli estremi dell'ombra portata sul piano medesimo dalla listella e dalla goccia, e le due cd , de rappresentano, la prima l'ortografia dell'ombra che porta la listella sulla goccia, e l'altra quella dell'ombra propria della goccia stessa.

Sia $I-iQ$ l'asse della goccia, ed ML il solito comune ai due piani coordinati.

1. Si determini la retta *ed* esprimente l'ombra portata dalla goccia sopra sè stessa, osservazione quinta, proposizione undecima, parte seconda.
2. L'ombra *fg* portata dalla stessa $HI-ed$ sul piano ortografico, corollario primo, proposizione undecima, parte terza.
3. Trovisi la retta $abgh$, che esprime l'ombra portata dallo spigolo $RN-rn$ della listella, osservazione seconda, proposizione ultima citata.
4. Dal segmento g si tiri gd parallela alla O , e si avrà nel segmento d di essa colla de l'altro termine dell'ortografia *ed* dell'ombra propria della goccia.
5. Si faccia PQ eguale all'aggetto della retta $RN-rn$ dall'asse della goccia, l'angolo QPM eguale al complemento di Γ ; tirisi la mc perpendicolare alla Qi , e si avrà il termine c , l'altro essendo in d dell'ortografia dell'ombra che porta la listella sulla goccia, la quale si descriverà facilmente, qualunque sia la direzione dei raggi di luce, colla regola esposta nel corollario quarto della proposizione trentesimanona, o coll'osservazione seconda della medesima proposizione, parte terza.
6. Finalmente descrivasi l'arco ellittico Af , cioè l'ombra portata sul piano ortografico dall'arco circolare $ML-AHD$, osservazione prima, proposizione seconda, parte terza; e la linea $abcdeAfgh$, così determinata, sarà la richiesta nella proposta proposizione.

OSSERVAZIONE. Nell'ipotesi ordinaria rispetto alla direzione della luce, tirando pel punto H , ed a destra di esso l'orizzontale eguale alla verticale eH , nell'altro termine di questa orizzontale si avrà il punto f ; e però unendo questo termine al punto ove concorrono le rette MB , iQ , LC , si otterrà immediatamente la fg . Nella medesima ipotesi, facendo per tutti i punti dell'arco circolare AH ciò che si è qui fatto per l' H , otterransi i punti dell'arco ellittico Af ; così si potrà descrivere l'arco ellittico cd anche colla regola semplicissima esposta alla fine del corollario quarto della proposizione trentesimottava, parte terza.

PROPOSIZIONE VII.

Trovare l'ortografia dell'ombra che accade sul pezzo di cornice dorica espressa dalla figura 120, tav. XII.

Il piano ortografico sia quello del fregio, e la ML al solito la linea comune a questo piano ed all'icnografico, e la parte della figura che trovasi sotto di questa retta esprima l'icnografia del triglifo.

1. Si faccia l'angolo abc eguale al complemento di Γ , e dai segmenti d, e, c , α si tirino $dfghvx$, $e1234$, $ciim$ ed $a\beta\beta$ orizzontali, e congiungansi le $i1, i2, -$, ed avrassi nella linea $cedfiii$, - - l'estremo dell'ombra portata dal gocciolatojo sul fregio.
2. Tirisi la μr parallela alla bc , e la rst orizzontale; indi le $\delta hs, qt$ parallele alla O , e la tv verticale, e sarà $hstv$ l'estremo dell'ombra portata sul fregio dal modiglione avente aq per ortografia.
3. Conducasi la lineetta uy parallela alla I , ed yg verticale, ed in questa avrassi l'ombra portata dal triglifo nella metopa.

L'estremo inferiore dell'ombra richiesta sarà adunque $cdfiii2 - - m4lyghstvx - -$.

OSSERVAZIONE. Se l'angolo acuto fatto colla ML dalla on fosse maggiore di quello che fa la I colla medesima ML , nel canaletto di ciascun triglifo cadrebbe un'ombra; gli estremi verticali di queste ombre, le quali per altro hanno luogo rarissime volte per la poca profondità dei canaletti medesimi, si determineranno come la kx della figura trentesimanona.

Così, se il punto t cadesse nell'ortografia dell'altro modiglione, per avere i punti che si dovranno sostituire in tal caso ai due t, v , basterà fare per gli n, c ciò che si è fatto per gli r, d ; e per descrivere le porzioni delle linee, le quali cadranno in questa ortografia, e che verranno sostituite in tutto od in parte alle vx, ts , si dovrà fare pel punto μ quello che si è fatto superiormente pel b , onde delineare la linea $iii - - 23m - -$.

PROPOSIZIONE VIII.

Trovare l'ortografia dell'ombra che accade sulla base attica (tav. XIII, fig. 121) insieme ad una porzione non rastremata del fusto della colonna, nell'ipotesi che la luce abbia la direzione ordinaria.

1. Si facciano le linee ab, bc, de, fx, xy, yh come si sono fatte le ab, bc, de, fg, gh, hp della figura centosedicesima.
2. Disegninsi nr, vu ortografie dell'estremo dell'ombra propria della listella e del toro inferiore, e l' st ortografia dell'ombra portata sul toro medesimo dallo spigolo di quest'ultima listella, che ha l'ortografia nella retta di cui è parte mn ; queste tre linee si faranno colle regole usate qui sopra per disegnare le analoghe de, yh, fx .
3. Si descrivano $l\zeta m, tv$ ortografie delle ombre portate sulla scozia e sul toro inferiore dalla linea che ha l'ortografia nella hy ; questo si otterrà agevolmente colla proposizione trentesimanona della parte precedente.

L'ortografia richiesta sarà adunque - - *abcdefxyhlmnrstvu*123.

OSSERVAZIONE 1. Le ortografie delle ombre portate dalle rette *de*, *rn* non sono visibili, perchè cadono sugli anelli orizzontali *Pf*, *rs*, i quali hanno ordinariamente una larghezza eguale all'altezza *nr*; anzi su questi anelli medesimi cadranno porzioni anche delle ombre portate dagli archi aventi le ortografie nelle *Md*, *mn*, come si è mostrato che succede per la base toscana.

OSSERVAZIONE 2. La linea che rappresenta il contorno superiore dell'ortografia dell'ombra che cade sulla scozia dovrebb'essere rigorosamente composta dalle due parti *lu*, *ξm* esprimenti le ortografie dell'ombra portata sulla stessa scozia dal toro superiore, e dalla terza *μξ* ortografia dell'estremo dell'ombra portata sulla medesima scozia dalla listella superiore ad essa, e propriamente dall'arco circolare avente - - *αβ* - - per ortografia; ma siccome la maggior larghezza verticale dello spazietto che bisognerebbe lasciare in luce sulla listella è poco più di un ventesimo dell'altezza della medesima listella, pertanto si potrà supporre tutto il contorno suddetto espresso dalla sola linea *luξm* ortografia dell'ombra portata sulla scozia dalla linea avente *hy* per ortografia, stante che nei disegni ordinarij la ventesima parte dell'altezza della listella anzidetta è trascurabile.

PROPOSIZIONE IX.

Trovare l'ortografia delle ombre che accadono sull'archivolto (fig. 122) avente per profilo ABEIC, nell'ipotesi che i raggi di luce abbiano la solita direzione ordinaria.

1. Si tiri il prolungamento *Xn* - - della *FG*, e la *δCn* che faccia l'angolo *LCn* semiretto, e descrivasi l'arco *Hl* col raggio *IC* e col centro *n*; sarà questo l'estremo dell'ombra che cadrà sul piano *Ij*.
2. Prolunghisi *μA* in *z*, e si costruisca l'angolo *BAz* eguale al dato Δ , e prendasi 96 eguale alla distanza che ha il segmento *B* dalla *A8*, e sarà 6 l'ortografia del punto dell'ovolo nel quale cadrà l'ombra portata dal punto avente la sua in 9.
3. Facendo centro in *C* e con un raggio maggiore di *C6* e minore di *C9*, si descrivano gli archetti *i*, *b*, *b*; tirisi *iva* parallela alla *A8*, e si determini il punto *r* della *Cn*, la cui distanza dalla *ML* sia eguale alla *av*; indi col centro *r* e col raggio eguale alle *C8* si descrivano gli altri archetti *c*, *c*; e nei segmenti di questi coi due antecedenti avransi due punti della linea 56*h7* ortografia dell'ombra portata sull'ovolo dall'arco circolare che ha 897 per ortografia, osservazione terza, proposizione trentesimaquarta, parte terza.

OSSERVAZIONE. Le intersezioni degli archetti *b*, *c*, che cadranno sotto la linea *ML*, si ometteranno, perchè sono affatto inutili per la descrizione della linea qui dimandata. Così essendo la porzione 65 eguale perfettamente alla *h6*, basterà descrivere col metodo qui indicato la 6*h7*, e poscia copiare opportunamente la sua parte *h6* nella 65, che si otterrà l'intera linea 56*h7* in quistione.

4. Descriverassi tanto l'ortografia $N\delta tk$, quanto l'icnografia RTU dell'estremo dell'ombra propria dell'ovolo: anche qui per descrivere la parte δN si potrà ricopiare la porzione δe della δek .
5. Fatta Tt perpendicolare alla ML , le tx , TX parallele alle O , I , dal punto X dove TX incontra il prolungamento della FG tirata Xx perpendicolare anch'essa alla ML , avrassi nel segmento x un punto dell'estremo oxq dell'ombra che porta l'ovolo sul piano Ifq , osservazione prima, proposizione seconda, parte terza; anche per questa linea si potrà avere la porzione of copiando opportunamente la parte fg della fgq .
6. Così, incominciando dal termine k , fatta pP perpendicolare alla ML , le PY , py parallele rispettivamente alle I , O , e dal segmento Y della PY colla YU prolungamento della DE condotta Yy perpendicolare essa pure alla ML , si otterrà in y un punto qualunque dell'ombra $2k$ portata da una porzione della linea $kp - - - UP - -$ sul piano della listella avente per profilo DE .
7. Pei segmenti q , 2 si tireranno le $q\beta$, $\alpha 23$ parallele alla O , e si descriverà colla regola esposta nella proposizione trentesimanona della terza parte l'ortografia $q3$ dell'ombra portata sul guscio generato dall'arco EF dalla linea che ha per ortografia $\alpha\beta$.
8. Finalmente si descriva l'ortografia 34 dell'ombra che porta sul guscio anzidetto l'arco circolare avente per ortografia 24 , osservazione terza, proposizione trentesimaquarta, parte antecedente.

OSSERVAZIONE. Se col raggio 6θ eguale alla $9C$, facendo centro in θ , si descriverà l'arco cadente fra le rette MC , $k7$, esso si approssimerà assaissimo alla linea $56h7$; così l'archetto $q3$ sarà prossimamente la stessa retta che unisce i suoi termini.

PROPOSIZIONE X.

Data l'ortografia e l'icnografia di una sfera, trovare l'estremo dell'ombra che essa porta sul piano icnografico.

I cerchi BC , RI (fig. 123), che hanno i centri in A , G , siano l'ortografia e l'icnografia della sfera.

Si tiri la AD verticale, la FCS parallela alla I , le BE , CL tangenti l'ortografia e che facciano gli angoli BEM , CLE ambi eguali al Σ , e poscia si facciano CH , CS eguali rispettivamente alle DE , DL ; e dal punto Q di mezzo della HS tirinsi le NQ , QP ambe eguali alla FG e perpendicolari alla stessa HS , e saranno HS , NP i due assi della periferia ellittica $SPHN$ rappresentante l'estremo dimandato, siccome è evidente.

OSSERVAZIONE 1. Pertanto, descritta la semiellisse RmI icnografia del contorno dell'ombra propria della sfera, sarà $rNSPsItm\psi Rr$ l'estremo

dell'ombra che bisognerà disegnare: è desso composto dalla semiellisse RmI , dai due archi circolari Rr , sI , e dall'altro arco ellittico rSs .

Se il punto E cadesse a destra del D , si prenderebbe GH a destra del G , vale a dire in generale bisogna fare la retta linea HGS eguale alla EDL anco nelle parti rispettive.

OSSERVAZIONE 2. In un modo affatto simile si determinerà anche l'estremo dell'ombra che la sfera porterà sul piano ortografico.

OSSERVAZIONE 3. Nell'ipotesi ordinaria per rispetto alla direzione della luce il quadrato della HS asse maggiore eguaglia il triplo di quello dell'altro.

PROPOSIZIONE XI.

Trovare l'ortografia dell'ombra che accade sul frontespizio (tav. XII, fig. 124), di cui le cornici hanno per profilo la fig. 125.

1. Si tirino le AB , CD (fig. 124) perpendicolari alle cornici, la EI (fig. 126) orizzontale, e le EG , EF , EH , EW parallele rispettivamente alle AB , CD , O , I .
2. Conducansi le HIW , KHG , HF perpendicolari alle EI , EG , EF , seghinsi le GK , FL eguali alla WI , ed uniscansi le EK , EL .
3. Facciasi l'angolo $kac = EKG$ (fig. 125), e tirinsi le dm , fh parallele alla stessa ac , e la dm sia tangente la linea ce ; seghinsi AM , AN , AP , AB eguali rispettivamente alle distanze che hanno i punti c , d , m , h dalla retta ka , e nelle Mq , No , Jt , BT parallele alla $A\delta$ avransi le ortografie degli estremi delle ombre che accadranno sul braccio Ao del frontespizio.

Se la dm segasse la ξ_2 , la Jz segherebbe la ka .

4. Così, fatto $kab = ELF$, le rette en , ξr , fg parallele alla ab , di cui la prima sia anche tangente l'arco d_2 , e segate le parti Cp , Cq , Cr , Cs , CD eguali correlativamente alle distanze che hanno i punti b , e , n , r , g dalla ka ; e poscia tirate le xp , yq , vr , zs , TD parallele tutte alla δC , e le δx , ωy , αv , kz , oT alla O , si avranno nelle xp , yq , vr , zs , TD gli estremi delle ombre che cagiona sopra sè stesso l'altro braccio del frontespizio.
5. Si descrivano i due archetti qx , ωy esprimenti le ortografie delle ombre portate sulla gola da piccole porzioni delle rette aventi le ortografie nelle δA , ωN , proposizione undecima, parte terza, non che l'ombra portata sul piano della listella ior da una parte di quella che ha per ortografia la retta ωN , cioè si tiri la ν_1 parallela anch'essa alla δA e distante da questa quanto il punto μ segmento delle dm , $n\xi$ lo è dalla ka .

PROPOSIZIONE XII.

AmMESSO che i raggi di luce abbiano l'ordinaria direzione, trovare l'ortografia del contorno dell'ombra che accade nella nicchia (tav. XIII, fig. 127), di cui la parte avente l'ortografia MBDL è la metà della superficie di un cilindro retto avente l'asse verticale, e quella che ha per ortografia BCD, cioè la volta, la quarta parte di una superficie sferica.

Si unisca il punto a di mezzo della ML col b centro del cerchio BCD , si faccia $bc = bD$, descrivasi col centro a il quadrante circolare Ld , si tiri ad esso la tangente $df = \frac{1}{2} aL$, ed uniscasi aef , e dal segmento e s'innalzi la verticale eg ; in fine seghisi la quarta parte Dh della semiperiferia BCD , e facciasi l'angolo Bgl semiretto; l'ortografia dimandata sarà composta della retta ac , la quale rappresenta l'ortografia dell'ombra portata dallo spigolo MB nel fondo della nicchia, dalla curva csg esprimente l'ortografia dell'ombra portata dall'arco Bnl sulla medesima superficie cilindrica $MBDL$, e dall'arco ellittico gh , il quale esprime quella dell'ombra portata sulla superficie della volta dall'arco lCh , proposizione decimaquinta, parte antecedente.

Per delineare cg , dai termini della verticale Nn si tirino le Nr , ns parallele alle I , O , e dal segmento r la rs parallela alla MB ; ed il punto s comune alle ns , rs apparterrà alla linea dimandata, osservazione seconda, proposizione sesta, parte terza.

OSSERVAZIONE 1. Se i raggi di luce fossero diretti comunque, si descriverebbero le linee analoghe alle ac , cg , gh , usando le regole esposte nelle proposizioni terza, sesta, decimasesta della terza parte, e si troverebbero i punti c , g , h con altre regole dichiarate nel seguito di queste medesime proposizioni.

OSSERVAZIONE 2. Se la volta superiore sarà una superficie di rotazione qualunque avente l'asse di rotazione verticale, le parti ca , cg si troveranno, come ho detto poc' anzi, e la gh colla proposizione trentesimanona della parte antecedente; se poi la medesima volta sarà la metà della superficie di una ellissoide o di una paraboloidi ellittica, ovvero di quella di una iperboloide a due foglie, e che BCD sia il piano della prima sezione della stessa superficie, si descriverà la parte gh colla proposizione ventesimaquarta della parte anzidetta, e le altre ca , cg come sopra.

PROPOSIZIONE XIII.

Data l'ortografia dello spaccato, ad un tempo profilo, MBCL (tav. XII, fig. 128) della nicchia di cui si parla nell'antecedente proposizione, trovare l'ortografia dell'ombra che portano i suoi lembi su di essa, nell'ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ammessa nella stessa proposizione antecedente.

Dal punto a di mezzo del quadrante BaC si tiri l'orizzontale ab e si seghi la terza parte Cc della corda del medesimo quadrante; l'ortografia dimandata sarà la linea bca , composta dell'arco ellittico ac , che rappresenta l'ortografia dell'ombra portata dall'arco aB , proposizione decimaquinta, parte terza, e dell'altro arco bc pure ellittico, il quale esprime l'ortografia dell'ombra che porta l'arco avente Bb per ortografia sulla medesima volta della nicchia, osservazione terza, proposizione decimottava.

OSSERVAZIONE. Se i raggi di luce avranno tutt'altra direzione che l'ordinaria, troveransi i punti b, c, a , e si descriveranno gli archi ellittici colle regole esposte nelle proposizioni decimasesta e decimottava dell'anzidetta parte, e di cui le citate dianzi sono casi particolari; così se la volta sarà una delle superficie contemplate nell'osservazione seconda della proposizione antecedente, troveransi le linee analoghe colle proposizioni ventesimaquarta, ventesimaquinta, ventesimanona e trentesimaprima anch'esse della terza parte.

PROPOSIZIONE XIV.

Descrivere l'ortografia del contorno dell'ombra cadente nel fondo della nicchia che ha il rettangolo FMLG (tav. XIII, fig. 129) per icnografia, e la figura MANEL per ortografia.

Si conducano le FH, HI, AI parallele alle I, MA, O , e la IN orizzontale, e si descriva la porzione ID della linea IDN eguale perfettamente alla ADE , e sarà HID l'ortografia dimandata.

OSSERVAZIONE 1. Se l'arco ADE sarà circolare, si tireranno FH, HI, AI come qui sopra, e pei punti C, c proiezioni del centro dell'arco ADE condurransi le CY, cy parallele alle I, O , e poscia la verticale Yy : fatto ciò, col centro y e col raggio FC si descriverà l'arco DI , e sarà HID l'ortografia richiesta.

OSSERVAZIONE 2. Se i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, sarà $Ax = xI = MF$; e però, fatte Ax e l'orizzontale xI ambedue eguali alla profondità della nicchia, avrassi immediatamente il punto I e la verticale IH ; così estesa l' xI di Iy eguale alla Ac , si avrà y centro per descrivere l'arco ID , e tutto ciò senza bisogno dell'icnografia della nicchia.

OSSERVAZIONE 3. Nel caso dell'ordinaria direzione dei raggi di luce, e che la profondità della nicchia sia la metà della sua larghezza, e l'arco ADE una semiperiferia circolare, basterà fare Em e l'orizzontale Im eguali alla metà della ML , unire I al punto di mezzo della ML stessa, e descrivere col centro m e col raggio Im l'arco ID , che avrassi l'ortografia dell'estremo dell'ombra, cioè la linea HID .

PROPOSIZIONE XV.

Data l'ortografia e l'icnografia dello spaccato ordinario di un arco, trovare l'ortografia dell'estremo dell'ombra che accade sopra di esso, ed il contorno dell'ombra portata dal medesimo sul piano ortografico.

Sia Mnb (tav. XIV, fig. 130) l'ortografia, ed MDB l'icnografia dell'arco, ed $f\mu m$ la sezione fatta al medesimo, cioè il profilo, supposto che siasi disposta in questa posizione parallela al piano ortografico col fare un quarto di rotazione attorno alla verticale $fM - F$.

DELL'OMBRA CHE ACCADE SULL'ARCO.

1. Tirinsi le pq , 12 parallele alle O, I , e la $2q$ alla Ff , indi l'orizzontale lq , e sarà $3ql$ l'ortografia del contorno dell'ombra che accade sul piè-dritto.
2. Conducasi la δu tangente la curva $f\mu m$, e che faccia colla ML l'angolo eguale al complemento di Γ , e poi dal punto di contatto tirisi l'orizzontale δo , ed o sarà il termine superiore dell'ortografia dell'ombra che cade sulla superficie della volta dell'arco. Coll'osservazione prima della settima proposizione della parte terza si avrà un punto qualunque dell'arco oe ; finalmente anche l'ultimo e di esso arco.

OSSERVAZIONE. Se i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, il punto q cadrà nella retta $D3$ e ad una distanza dalla retta ph eguale all'aggetto dello spigolo $ph - 14$.

DELL'OMBRA PORTATA SUL PIANO ORTOGRAFICO.

Le rette de , li siano parallele alla O , i punti 8, 9 dell'arco $f\mu$ siano nelle orizzontali tirate per gli e, d , ed i due D, E abbiano dalla $2F$ distanze eguali rispettivamente a quelle che hanno gli anzidetti 8, 9 dalla verticale bM ; così sia $i6$ parallela alla Bb , ed $F5a$ alla I .

La linea che porta il contorno di quest'ombra è composta delle $B - ba, BC - bc, CD - cd, EF - ef, 45 - g, 4 - gh, 46 - hi, F - lM$; per trovarla,

1. Si tirino le $bB', cC', eE', gG, hH, li$ parallele alla O , e le corrispondenti $BL, CS, E\Delta$, - - parallele alla I ; indi conducansi le verticali $LB'A, SC', \Delta E'$, - -, ed avransi i punti B', C', E', G, K, H ed I della linea in quistione.
2. Si congiungeranno le rette $aI, IH, HK, KG, C'B'$, e si descriverà tanto la curva GE' , che rappresenta l'ombra portata dall'arco $EF - ef$, quanto la $E'C'$ esprimente quella portata dall'arco $CD - cd$, ambedue mediante l'osservazione terza della proposizione seconda della parte terza: la linea $aIHKGE'C'B'A$, composta di queste curve e delle rette $aI, IH, HK, KG, C'B'$, sarà il contorno qui dimandato.

OSSERVAZIONE. Se la curva $f\mu$ fosse di second'ordine, tali sarebbero anche le tre oe, GE', EC' : essendo $f\mu$ un arco circolare, questi archi saranno ellittici. In quest'ultimo caso, frequentissimo in pratica, si potrà avere immediatamente il punto e senza descrivere veruna parte della curva oe , e nel modo che segue.

Pei punti C , n proiezioni del centro dell'arco $CD --- nc$ si tirino le CV , cv parallele alle I , O , si faccia l'orizzontale $v\lambda = BV$, e si descriva l'archetto μ col centro λ ed il raggio eguale a quello dell'arco stesso, e che seghi l'arco fm ; indi conducasi dal segmento μ l'orizzontale, e questa incontrerà la verticale bf nel punto e termine richiesto.

La periferia circolare avente il centro in $V-v$ ed il raggio eguale a quello dell'arco fm si trova nella superficie cilindrica che ha le rette generatrici parallele ai raggi di luce, e per base l'arco $CD --- nc$, e questa periferia circolare sega evidentemente la $BF-bf$ nel punto che ha il segmento e anzi determinato per ortografia; adunque ecc.

Nell'ipotesi che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria, descritti col raggio anzidetto e coi centri v , n due archi, e dal loro incontro più in alto tirata l'orizzontale a segare bf , avrassi immediatamente in questo segmento il punto dimandato e .

PROPOSIZIONE XVI.

Il rettangolo EDAM (tav. XIII, fig. 131) esprime l'ortografia dello spaccato ordinario di una volta a botte, il quadrante circolare BCA quella di una mezza volta emisferica, la quale ha il centro nel termine dell'asse di quella a botte; qual sarà l'ortografia dell'ombra che accadrà nella volta composta da queste due, nell'ipotesi della direzione ordinaria dei raggi di luce?

1. Facciansi gli angoli ADF , ABC semiretti, e si tirino le orizzontali HI , FG , e la corda KJx del cerchio $BHFK$ parallela alla BC ; gli archi ellittici ca , ce , i quali esprimono le ortografie delle ombre portate dagli archi circolari aventi per ortografie BHa , BI , descriveransi colle regole dichiarate nella proposizione decimasesta e nell'osservazione terza della proposizione decimottava, ambedue della parte terza.
2. Si tiri l'orizzontale RrT tra i punti G , e , e poscia col centro D ed il raggio eguale alla RT si descriva l'archetto S che sega la stessa RT , e questo segmento sarà un punto dell'arco ellittico GSe esprimente l'ortografia dell'ombra portata dalla retta ED sulla medesima porzione di superficie sferica avente ABC per ortografia; oppure si conduca la rs perpendicolare alla HF , ed estendasi sino alla semiperiferia HsF descritta sulla HF , e seghisi $RS = rs$, e si otterrà lo stesso punto S .

Di fatto l'ombra portata dalla retta DE sulla superficie sferica è evidentemente la sezione fatta alla superficie medesima dal piano parallelo ai raggi di luce e che passa per la stessa retta DE : l'ortografia di essa sezione sarà adunque l'ellisse che ha per uno degli assi la verticale GI , e l'altro, cioè l'orizzontale, eguale alla corda FH .

Ma è

$$GR : \frac{1}{2} GI = Fr : \frac{1}{2} FH,$$

$$\text{ed } IR : \frac{1}{2} GI = Hr : \frac{1}{2} FH,$$

$$\text{o sia } GR \cdot IR : (\frac{1}{2} GI)^2 = Fr \cdot Hr : (\frac{1}{2} FH)^2,$$

$$\text{ovvero } GR \cdot IR : (\frac{1}{2} GI)^2 = (rs)^2 : (\frac{1}{2} HF)^2;$$

ed appunto sta per l'ellisse.

$$GR \cdot IR : (\frac{1}{2} GI)^2 = y^2 : (\frac{1}{2} HF)^2;$$

y esprime l'ordinata orizzontale dell'ellisse e corrispondente al punto R ; adunque sarà y eguale alla retta rs . Quindi il punto S , sopra determinato, si troverà nella periferia della medesima ellisse, come ho dichiarato.

L'estremo dell'ombra che accadrà sulla volta in quistione avrà adunque per ortografia la linea $EDBaceGAM$.

OSSERVAZIONE. Onde avere il punto e comune agli archi GSe , *ec* senza delineare essi medesimi, sulla corda xIK si descriverà la periferia circolare $xyzK$, farassi Iy perpendicolare alla stessa IK , si tirerà la yz , la quale comprenda colla Kx l'angolo eguale al dato Δ ; indi si condurrà dal punto z la perpendicolare alla medesima xK , ed avrassi nel piede di questa il punto e richiesto, proposizione vigesimaseconda, parte terza.

PROPOSIZIONE XVII.

Trovare l'ortografia e l'icnografia dell'ombra che accade sul corpo di fabbrica (tav. XI, fig. 111) composto del tetto $Lm - LP$ e dell'altana $ah_4 - AHD$.

1. Si faccia l'angolo 214 eguale al complemento del Γ , si tiri $1xz$ parallela alla O e l'orizzontale 23 , e sarà $xz3$ l'estremo inferiore dell'ortografia dell'ombra visibile portata sull'altana dalla gronda del suo tetto.

Se il punto x cadrà nel 2 ovvero sotto di questo, l'estremo in quistione sarà la semplice retta orizzontale 23 .

2. Si conduca AM parallela alla I , Mm perpendicolare alla ML asse, ed uniscasi am ; tirinsi le $3n$, $4is$ parallele alla O , la ns alla LM , e poi le iI , nN perpendicolari alla stessa LM , e la NS parallela ed eguale alla ns .

3. Meninsi le DE , Ee parallele rispettivamente alle AM , Nn , e le EF , ef parallele ed eguali alla 14 ; finalmente si tirino le FG , fg , HG , hg ordinatamente parallele alle ES , es , AM , am , e saranno *ansefgh --*, *ANSEFGH --* l'ortografia e l'icnografia dimandate, come risulta dalla proposizione prima della parte antecedente.

OSSERVAZIONE 1. Se la luce avrà la direzione ordinaria, il punto x cadrà insieme al z nel punto 2 , e le rette 12 , $3n$, $4is$, AM , DE , HG faranno degli angoli semiretti colla ML ; e però saranno facilmente determinate.

OSSERVAZIONE 2. Qualora si abbia solo per iscopo di acquerellare, si potranno omettere le linee hg , gf , fr , Ht , Au , essendo esse coperte dall'ortografia o dall'icnografia dell'altana.

Queste rette, che nel detto caso si possono omettere, variano evidentemente, variando la direzione della luce, le dimensioni e le posizioni relative del tetto e dell'altana: in

generale, ammesso sempre che abbiasi di mira il solo acquerellamento, si potranno omettere come inutili le porzioni del contorno *hgfre* -- che cadranno nell'ortografia dell'altana o sopra l'orizzontale -- *im*, come pure quelle dell'altro contorno *HGFE* -- che risulteranno nel rettangolo esprimente l'icnografia dell'altana medesima, ovvero sopra l'asse *LM*.

PROPOSIZIONE XVIII.

Vi sono delle superficie cilindriche le quali hanno le rette generatrici orizzontali, e sono conosciute per via della loro retta generatrice che si trova nel piano icnografico e della sezione fatta ad esse da un piano perpendicolare alle medesime generatrici. L'ortografia e l'icnografia del contorno delle ombre proprie di queste superficie si potranno anche determinare col metodo seguente.

Sia *LC* (tav. XIV, fig. 132) la retta generatrice, lungo la quale è segata la superficie cilindrica dal piano icnografico, ed *elc* (fig. 133) rappresenti la sezione fatta alla medesima superficie dal piano verticale che passa per la *CQ* perpendicolare alla stessa *LC*.

Si faccia *DE* parallela alla *I*, *DF* perpendicolare all'*ML* asse, e *DA* alla *LC*, *FG* parallela alla *O*, *EHG* perpendicolare anch'essa all'*ML*, ed *EA* alla *DA*; si seghi *AB* eguale alla *CH*, ed uniscasi *BD*, indi si conduca la *dl* tangente la curva *cle*, e che faccia l'angolo *ldq* eguale all'*ADB*; tirisi *lq* perpendicolare alla *xd*; finalmente si faccia *CQ = cq*, *HV = ql*, e conducansi le *QR*, *VT* parallele rispettivamente alle *CL*, *ML*, e saranno queste l'icnografia e l'ortografia del contorno dell'ombra propria in quistione.

Dal punto *E—G* sia tirata la perpendicolare al piano verticale che passa per *DA*, ed unito il suo piede ai due punti *D*, *A*; la prima di queste rette rappresenta nel detto piano verticale la proiezione ortogonale della *ED—GF* parallela ai raggi di luce, e la seconda, la quale è nella stessa verticale passante per *A*, sarà eguale alla *GH* o sia alla *AB*; quindi l'angolo che fa la prima di queste ultime due rette colla *DA* eguaglierà il *BDA*, vale a dire quella retta la quale si trova nel piano verticale e perpendicolare alla *LC*, e che rappresenta la proiezione ortogonale di una parallela ai raggi di luce, fa coll'orizzonte un angolo eguale al *BDA* costituito sopra.

L'estremo dell'ombra propria della superficie è la retta generatrice comune alla superficie cilindrica ed al suo piano tangente parallelo ai raggi di luce: questa retta sega l'intersecazione fatta alla medesima superficie dal piano verticale condotto per la *CQ* in un punto, da cui, tirata la retta tangente a questa intersezione, si ottiene la stessissima comune sezione del piano verticale e del piano tangente anzidetto. Ma nella retta intersecazione comune di questi due piani cade la proiezione ortogonale fatta, sul piano verticale, delle rette parallele ai raggi di luce che si trovano nel piano tangente; adunque la retta tangente alla comune sezione della superficie cilindrica e del piano verticale che passa per *CQ*, e che tocca questa medesima intersecazione nel punto comune all'estremo dell'ombra, deve fare coll'orizzontale *CQ* un angolo eguale al *BDA*; e per essere la retta *qd* orizzontale, e la linea *cle* la medesima intersecazione, la retta *ld* esprimerà la tangente in quistione; quindi, essendo le *VH*, *CQ* eguali rispettivamente alle *lq*, *eq*, e le *VT*, *QR* parallele alle *ML*, *LC*, saranno esse *VT*, *QR*, la prima l'ortografia, e la seconda l'icnografia dimandate, cioè del contorno dell'ombra propria della superficie cilindrica.

OSSERVAZIONE. Se la linea lce sarà un arco di cerchio, facendo l'angolo lxc al suo centro eguale all' ABD , si avrà immediatamente il punto l di contatto; e se essa sarà una linea di second' ordine, potrassi determinare il punto medesimo di contatto anche colle regole esposte nei *lemmi nono, decimo ed undecimo*.

PROPOSIZIONE XIX.

Data l' ortografia vecgh-- (fig. 134) e l' icnografia BCDEFGHV di una volta a padiglione od a spicchi, non che la sezione xy (fig. 135) fatta ad essa perpendicolarmente ad una delle rette CD, DE--, trovare l' ortografia e l' icnografia del contorno dell' ombra propria di essa superficie.

Si tirino le AI, IO, IP, IS, IU (fig. 136) parallele rispettivamente alle I, CD, DE, EF, FC , e le AO, AP, AS, AU perpendicolari alle IO, IP, IS, IU , e le ANJ, IK alla ML asse, e la KJ parallela alla O ; indi si segghino le OQ, PR, ST, UX eguali alla JN ; uniscansi le AQ, AR, AT, AX ; si conducano le $1n, 2p, 3q, 4r$ tangenti la curva $x143y$, e che facciano gli angoli $1nx, 2px, 3qx, 4rx$ eguali ordinatamente agli OAQ, RAP, SAT, XAU , e le $1i, 2k, 3l, 4m$ perpendicolari alla ML . Fatto ciò, si tirino le $\alpha\beta, \gamma\delta, \varepsilon\zeta, \theta\eta$ parallele rispettivamente alle CD, DE, EF, FC , e le cui distanze da queste siano eguali alle xi, xk, xl, xm , e le $11, 22, 33, 44$ parallele alla ML e distanti da essa correlativamente di $1i, 2k, 3l, 4m$; e saranno, per la precedente proposizione,

$$C\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\theta G, c11223344g$$

l' icnografia e l' ortografia dimandate.

Nel disegno ortografico si segna la sola ortografia $c1122e$, perchè la rimanente risulta coperta dall' ortografia della stessa superficie.

Se la retta lq sarà parte della ML , come nella figura presente, le $11, 22, 33, --$ saranno porzioni delle parallele alla ML medesima condotte pei punti $1, 2, 3, --$.

Così, se le superficie esteriori degli spicchi saranno cilindriche ordinarie rette, supposto Δ il centro dell' arco xy , i punti di contatto $1, 2, 3, --$ si determineranno assai facilmente e con somma esattezza, facendo gli angoli $1\Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x, 4\Delta x$ al centro dell' arco xy ed eguali ordinatamente agli AQO, ARP, ATS, AXU .

OSSERVAZIONE. Pel punto I non ho condotto le parallele alle BC, GH , perchè le facce della volta, le quali si appoggiano su questi lati, sono interamente illuminate.

PROPOSIZIONE XX.

Una superficie cilindrica, che ha le rette generatrici orizzontali, è segata dal piano icnografico lungo la retta AB (fig. 137), ed ha per sezione piana perpendicolare alla stessa AB la linea DPE ; qual sarà l'ortografia dell'ombra portata su questa superficie dalla linea $GHS - ghs$?

Trovato l'angolo θ che fa la proiezione ortogonale della parallela ai raggi di luce sul piano verticale e perpendicolare alla AB , proposizione penultima, si tiri HI perpendicolare alla stessa AB , Hh alla ML asse, e la hm parallela alla O ; si faccia $EN = IH$, la NT perpendicolare alla EN ed eguale alla hp , e la TP che faccia colla EN l'angolo eguale al θ anzi trovato; in ultimo conducasi Pm parallela alla ML , ed il segmento m sarà un punto dell'ortografia dimandata.

Si conduca la PQ perpendicolare alla LM . Trasportato il piano DEF verticalmente sulla HI , in modo che il punto E cada in I , la linea EQF secondo la IH ; la nuova posizione del punto T coinciderà coll' $H - h$, quella del P sarà nella generatrice della superficie in cui cadrà l'ombra portata dalla $H - h$; e però la distanza fra quest'ombra ed il piano icnografico eguaglierà la PQ ; quindi la sua ortografia sarà nella retta Pm .

Ma l'ortografia dell'ombra portata dal punto $H - h$ debb' essere anche nella hm ; sarà adunque essa in m , come voleva dimostrare.

PROPOSIZIONE XXI.

Data l'icnografia $ABCDE - - KV$ (tav. XVI, fig. 138) e l'ortografia $abcde - - kv$ dello spaccato ordinario di una volta a spicchi, e le superficie cilindriche a cui appartengono gli spicchi come la superficie cilindrica considerata nella proposizione antecedente, trovare l'ortografia dell'ombra portata nell'interno di essa volta dal suo lembo $AVK - - - avk$.

Si faccia CH perpendicolare alla ML asse, GI parallela alla I , HF alla O , FI anch'essa perpendicolare alla ML , IL parallela alla AB , ed uniscasi HL ; indi si tirino le mt , nf parallele alla HL , la prima tangente, e l'altra segante la vma , e le nx , fx parallele alle O , ML ; ed il segmento x sarà un punto del contorno dell'ortografia dell'ombra cadente sulla superficie $ABV - avv$, ed m un termine del medesimo: nel modo che si è trovato il punto x , si troverà qualsivoglia altro punto del lato mp della linea esprimente l'ortografia dimandata.

Gli altri lati pq , qs , ecc. del medesimo contorno si descriveranno colla proposizione antecedente: essi sono le ortografie delle ombre portate dalla linea $AVK - avk$ sulle superficie cilindriche che hanno le rette generatrici orizzontali e che sono segate dal piano icnografico lungo le rette BC , CD , ecc.

L'ortografia dimandata sarà adunque $Sqpmvk$.

OSSERVAZIONE 1. Estesa CD sino in P ad incontrare il prolungamento della VA , e tirata PQ perpendicolare alla ML , QU parallela alla traccia ortografica del piano che passa per DCP ed è parallelo ai raggi di luce, e dal segmento U condotta US parallela alla O , si otterrà in S il principio inferiore dell'arco Sq , cioè il punto dove la linea $mpqS$ segnerà l'orizzontale LM , e ciò senza descrivere la linea stessa.

OSSERVAZIONE 2. Se gli spicchi della volta saranno altrettanti triangoli rettilinei, la linea $mpqS$ ortografia dell'estremo dell'ombra si ridurrà ad una sola retta, la quale si determinerà facilissimamente come segue.

L'ortografia della volta sia $abcde - - kv$ (fig. 139), e l'icnografia la medesima $ABCDE - - KV$ della figura antecedente.

Si tirino le vg , VN parallele rispettivamente alle O , I , la gN perpendicolare alla ML ; uniscasi NK , e dal punto R , comune a questa retta ed alla CD , si tiri Rr perpendicolare alla stessa ML , e nella retta vr avrassi l'ortografia dell'estremo dimandato.

Imperciocchè, per essere $VN - vg$ parallela ai raggi di luce, sarà NK la traccia icnografica di quel piano parallelo ai raggi di luce il quale passa per la linea che porta l'ombra, cioè per la $KV - kv$; e per conseguenza $R - r$ sarà un punto della linea esprime l'ombra portata sulla superficie della volta dalla stessa $KV - kv$; ma quest'ombra deve passare anche pel punto $V - v$; sarà dunque la retta situata nel piano $BCV - bcv$ e che ha i termini nei punti $R - r$, $V - v$: quindi l'ortografia di essa, cioè la cercata, sarà la retta vr , come ecc.

PROPOSIZIONE XXII.

Ammesso che la luce abbia la direzione ordinaria, trovare l'ortografia degli estremi delle ombre che accadono nello spaccato ordinario di una cupola coperta dalla superficie di un emisfero aperta in cima circolarmente.

Siano $MmaIz4L$, MSL (tav. XV, fig. 140) l'ortografia e l'icnografia della nicchia, ed YI il suo asse.

1. Dal punto r di mezzo della bQ si prenda $r\mu = rI$, e dal segmento dei due archetti Z descritti coi centri μ , I e col medesimo raggio br si tiri Zo perpendicolare alla bQ ; e pel punto V di mezzo del quadrante BR si tiri la verticale Vv , e saranno o , v i termini dell'arco ellittico vo esprime l'ortografia dell'ombra portata da una porzione dell'arco $BVR - HI$ sulla superficie cilindrica $BRX - HQ$. Quest'arco ellittico si potrà descrivere colla regola esposta nel corollario terzo della proposizione terza della parte antecedente.
2. Si seghino le terze parti $l\lambda$, ca delle corde $Q\lambda$, ba del circolo $JQ\lambda$ ambe parallele alla O , e trovinsi i punti T , d ortografie di quelli, ove la semiperiferia $JQ\lambda$ ed il suo diametro orizzontale sono segati dall'ortografia

dell'ombra portata sulla volta dalla periferia stessa $JQ\lambda$; indi descrivansi della medesima ortografia le due porzioni Tl , cd colla proposizione trentesimaquinta, parte anzi citata.

3. Pel punto o si tiri $f1oe6$ parallela alla O , descrivasi sulla sua parte 16 la semiperiferia 176 , tirisi la fN perpendicolare alla $f6$, e la fFE verticale; seghisi $fN=EF$, indi conducasi la $N7$, che faccia colla $f6$ l'angolo eguale al dato Δ , e dal segamento 7 tirisi la $7e$ perpendicolare alla stessa $f6$, ed avrassi in e l'altro termine dell'arco ellittico le esprimente l'ortografia dell'ombra portata dall'arco circolare avente Qo per ortografia, il qual arco ellittico si descriverà colla proposizione decimanona, ed anche coll'osservazione seconda della proposizione trentesimaquarta, ambedue della terza parte.
4. Così, descritta la semiperiferia $2\beta k$ sulla corda $2k$ parte della retta Hk parallela anch'essa alla O , facciasi l'angolo $2H\beta$ esso pure eguale al Δ ; tirisi βi perpendicolare alla Hk , ed avrassi in i il punto comune alle parti ie , ic dell'ortografia del contorno dell'ombra cadente nell'interno della volta.

La prima di queste parti, cioè la ie , la quale esprime l'ortografia dell'ombra portata dall'arco circolare $BF-Hf$, si descriverà colla medesima regola esposta nell'osservazione seconda anzi citata, e la seconda ic ortografia dell'ombra che cagiona la verticale $B-bH$ si farà mediante il corollario quinto, proposizione trentesimottava della parte terza.

OSSERVAZIONE. Conducasi la verticale Kh , che passi pel punto C di mezzo della corda BR , e sia eguale alla CS , e tirisi la verticale Ss , ed avransi nelle rette Kh , Ks due semiassi della periferia ellittica, di cui è parte l'arco ic . Conoscendosi di quest'arco i due semiassi, esso si potrà anche descrivere coi metodi ordinarij.

5. Si costruiscano le porzioni MO , GD della periferia ellittica che rappresenta l'ombra portata dalla periferia $JQ\lambda$ sul piano orizzontale as , e ciò col corollario secondo, lemma primo; e dai segamenti O , G tirinsi le verticali OP , Gg , e dai P , g le PJ , $g8$ parallele alla O .
6. Si descrivano le ortografie ty , xn delle ombre portate dagli spigoli $5j-uz$, $9\beta-34$ sulle superficie cilindriche aventi le ortografie negli spazj $uy3$, xnp , osservazione seconda suddetta, od anche osservazione seconda, proposizione sesta, ambe della terza parte.

Queste ortografie ai termini y ed n piegheranno in alto, come è espresso nella figura, di una parte piccolissima.

7. Colla stessa ultima osservazione anzi accennata trovinsi le linee gu , $t3$ e la xp intercette fra le rette JPp , $3x$, ut parallele alla O , ortografie delle ombre portate dalle tre parti successive dell'arco $J8$ sulle superficie $AGA-az$, $5j-tu$, $MDL-mL$.

8. Finalmente colla medesima osservazione seconda della proposizione sesta citata si descrivano le pq, qwY ortografie delle ombre portate sulla $MDL - mL$ superficie cilindrica della cupola dall'arco circolare $AO - aP$ e dalla linea mistilinea $amM - MA$.

L'ortografia dimandata sarà dunque $Tleicdguzyt34nxpqwYMmaJbHroQ$.

OSSERVAZIONE 1. La superficie interna della cupola essendo quella di rotazione avente per generatrice $HbJamM$, e per asse di rotazione la verticale $YI - Y$, si potrà descrivere l'intera linea $Tleicdgut3xpqrwY$ anche colla sola regola esposta nella proposizione ventesimanona, parte precedente, osservando che la linea portante gli estremi dell'ombra è la composta da quelle che hanno per ortografie $QT, QO, fH, Hb, bJ, aP, am, mM$.

OSSERVAZIONE 2. Se la cupola fosse coperta da una superficie di rotazione avente l'asse verticale e aperta in cima circolarmente, si descriverebbe l'estremo dell'ombra o determinando le successive sue parti mediante le proposizioni relative alle superficie di rotazione analoghe alle sovraccitate per la sferica, ovvero colla stessissima regola citata nell'osservazione antecedente.

PROPOSIZIONE XXIII.

Trovare l'ortografia dell'ombra che accade sul muro che ha ABCDEF - - (tav. XIII, fig. 141) per icnografia, ed LMabcdef - - per ortografia.

Si tirino le A_1, B_2, C_4 parallele alla I , le a_5, b_6, c_8 alla O , e le $1n_5, 2_6, 3_7, 4_8$ alla Aa , ed uniscansi le $5_6, 6_9, 7_9, 8_d$, e saranno $d_8, 8_9, 6_5, 5_n$ le ortografie delle ombre portate sul muro dalle rette $CD - cd, BC - bc, AB - ab$, e dalla parte superiore della $A - Ma$; quindi l'ortografia dimandata sarà $Mabcd8_96_5n$.

PROPOSIZIONE XXIV.

Data l'ortografia e l'icnografia di un pozzo militare piramidale, trovare l'icnografia dell'ombra che accade nella sua icnografia, e l'ortografia di quella che accade nello spaccato ordinario di esso, ammesso che i raggi di luce abbiano la direzione ordinaria.

Sia FKG (fig. 143) l'icnografia, lmj (fig. 142) l'ortografia del pozzo, e v l'incontro delle hj, ki .

DELL'ICNOGRAFIA.

Si tiri la retta lc parallela alla O , e dai punti c, b , dove sega la ki ed il prolungamento della mk , tirinsi le cC, bB parallele all'asse del pozzo; indi congiungansi le AEB, STB e le EC, CT , e sarà $AECTSF$ l'icnografia dimandata.

Conducasi hp parallela anch'essa alla O , la pP all'asse, ed uniscasi PQ : fatto ciò, tirinsi le LD , HN parallele alla I , e le Dd , Nn all'asse medesimo; congiungansi le dn , nrv , e avrassi nella $ldnrjh$ l'ortografia dimandata.

OSSERVAZIONE 1. Se si avesse la sola porzione $LACM$ dell'icnografia, cioè quella della metà del pozzo, condotte le rette NRV , RJ , l'icnografia dell'ombra cadente in essa sarebbe evidentemente $AEDNRIL$.

OSSERVAZIONE 2. Se la direzione della luce fosse qualunque (fig. 143 e 144), condotte Fc , lc parallele alle I , O , le cC , bB , eE all'asse del pozzo; ed unite STB , TPC , AE , tirata PO parallela alla AG , ed unita anche EO , sarà $AEOPTSF$ l'icnografia dell'ombra che accadrà in questo caso nel pozzo intero.

PROPOSIZIONE XXV.

Il rettilineo $mcqjs$ (tav. XVII, fig. 145) composto dei due trapezj $mcas$, $aqjs$, rotando attorno alla verticale $C-cq$, genera un pozzo militare conico, il quale ha per ortografia $mlyzjs$, e per icnografia $MALW$ (fig. 146); qual sarà l'icnografia dell'ombra che accadrà sopra di esso, e l'ortografia di quella cadente nel suo spaccato ordinario?

Siano V , p i punti dove i prolungamenti della yz incontrano le cC , cl , e v sia quello d'incontro della stessa cC col prolungamento della ly .

DELL'ICNOGRAFIA ED ORTOGRAFIA DEL CONTORNO DELL'OMBRA

CHE CADE SULLA SUPERFICIE CONICA

GENERATA DALLA RETTA $MS-ms$ NELLA SUDETTA ROTAZIONE.

1. Si tirino le vd , ΓCD parallele alle O , I , e la dD alla cC , e dal segmento D tirinsi le DA , $D1$ tangenti la periferia $AL1$; i punti A , 1 di contatto saranno anche i due segmenti della stessa periferia $AL1$ colla icnografia qui richiesta, corollario della proposizione decimaterza, parte terza. Così, tirata Aa pel contatto Ae parallela alla Cc , si avrà il segmento a dell'ortografia dimandata coll'orizzontale ml , corollario medesimo.
2. Si faccia $c\lambda$ parallela alla dv , Ee alla cC , e descrivansi gli archetti B , 3 col raggio eguale alla CM e col centro E , ed avransi in B , 3 gli altri due termini dei contorni AB , 13 : condotta poscia Bb parallela anch'essa alla cC , il suo segmento b coll'orizzontale sy sarà anche quello di questa coll'arco ab , ovvero il termine inferiore di questo medesimo arco, osservazione terza, proposizione trentesimaquarta, parte terza.

OSSERVAZIONE. Tirata mr parallela alla dv , e la rR alla cC , posto $cm = a$, $sa = b$, $ca = r$, l'angolo $MCD = n$, e la cotangente del $vdC = \xi$; e nominata P la porzione della Rr intercetta fra il punto R ed il segmento di esso Rr colla parallela alla CD tirata pel punto M , si avrà

$CR = ra = mc - ca \cdot \cotang. rmc = a - r\xi$, e $P = ca \cdot \tang. vdc \tang. MCD = r\xi \tang. n$, e l'ordinata del cerchio SBY , che corrisponde al punto R medesimo, eguale a

$$\sqrt{\{b^2 - (a - r\xi)^2\}}.$$

Adunque l'ombra portata dal punto $M - m$ sul piano orizzontale che passa per sy sarà fuori o dentro della periferia $SBY3$, ovvero nella periferia medesima, secondo che risulterà $r\xi \tang. n$ maggiore o minore, od eguale a $\sqrt{\{b^2 - (a - r\xi)^2\}}$.

Pel caso delle dimensioni ordinarie del pozzo e che i raggi di luce siano diretti, come suppongono generalmente i disegnatori, si ha $b = \frac{3}{4}a$, $r = \frac{3}{8}a$, $\xi = 1$, $\tang. n = 1$, e però

$$P = \frac{3}{8}a, \text{ e } \sqrt{\{b^2 - (a - r\xi)^2\}} = \frac{a}{8} \sqrt{11}; \text{ cioè}$$

$$r\xi \tang. n \text{ minore di } \sqrt{\{b^2 - (a - r\xi)^2\}};$$

e conseguentemente l'ombra portata dal punto $M - m$ cadrà dentro il cerchio SBY , appunto come ho tacitamente supposto.

3. Condotte le fgh , fF parallele rispettivamente alle lm , cC , e descritti i due archetti che si segano in K . 4, l'uno col centro F e col raggio eguale alla cm , e l'altro facendo centro in C e col raggio eguale alla gh ; questi due segmenti saranno due punti delle curve AB , 13, osservazione terza anzi citata. In fine il segmento k dell'orizzontale gh colla Kk tirata per K parallelamente alla stessa Cc sarà un punto dell'ortografia ab .

OSSERVAZIONE. Le tre linee AB , 13, ab , delle quali le due prime si eguagliano perfettamente, saranno archi ellittici per la proposizione decimaterza sopraccitata, e però essi si potranno anche delineare colle cose colà dichiarate.

DELL' ICNOGRAFIA DELL' ESTREMO DELL' OMBRA CADENTE SULLA SUPERFICIE DEL TRONCO DI CONO $syzj - SBY3$.

AmMESSO che il pozzo abbia le ordinarie dimensioni, e che la luce sia diretta, come si suppone comunemente, il rimanente arco costituente l'estremo dell'ombra, quello cioè i cui termini hanno le icnografie nei punti B , 3, e che io suppongo che abbia $BO3$ per icnografia, sarà portato interamente da una porzione della periferia avente AWL per icnografia; più l'icnografia del medesimo arco cadrà tutta fuori del cerchio $QJZ\beta$.

Imperciochè, condotta la Vi parallela alla O , la iI alla Cc , le IX , $I5$ tangenti il circolo $B5Y$, e le XN , BQ perpendicolari amendue alla IC , si ha

$$CI : CX = CX : CN, \text{ ed } EB^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CE}^2 + 2CE \cdot CQ,$$

$$\text{o sia } CN = \frac{\overline{CX}^2}{CI}, \text{ e } QC = (\overline{EB}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CE}^2) : 2CE.$$

Ma, ritenute le denominazioni fatte poc' anzi, e posto di più $\alpha V = d$, $\cos. n = \beta$, si ha

$$CX = BC = b, BE = a, CI = \frac{ia}{\cos. n} = \frac{d\xi}{\beta}, CE = \frac{ea}{\cos. n} = \frac{r}{\beta}\xi;$$

adunque sarà

$$CN = b^2 : \frac{d\xi}{\beta} = \frac{b^2\beta}{d\xi}, \text{ e } QC = \left(a^2 - b^2 - \frac{r^2\xi^2}{\beta^2} \right) : 2 \frac{r\xi}{\beta},$$

$$\text{ovvero } CN = \frac{2b^2r\beta^2}{2rd\xi\beta}, \text{ e } QC = \frac{(a^2 - b^2)d\beta^2 - r^2d\xi^2}{2rd\xi\beta}.$$

Quindi sarà QC minore di CN , se $(a^2 - b^2)d\beta^2 - r^2d\xi^2$ sarà minore di $2b^2r\beta^2$,

o sia $\{(a^2 - b^2)d - 2b^2r\}\beta^2$ di $r^2d\xi^2$, oppure $\frac{(a^2 - b^2)d - 2b^2r}{dr^2}$ minore di $\frac{\xi^2}{\beta^2}$: così se

saranno queste ultime due quantità eguali, ovvero la prima maggiore dell'altra, tale pure sarà QC rispetto alla CN .

Nell'ipotesi ordinaria, sì per le dimensioni del pozzo che per la direzione della luce,

si ha $b = \frac{3}{4}a$, $r = \frac{3}{8}a$, $d = \frac{5}{3}a$, $\xi = 1$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, valori che riducono

$$\frac{(a^2 - b^2)d - 2b^2r}{dr^2} = \frac{59}{45}, \text{ e } \frac{\xi^2}{\beta^2} = 2;$$

vale a dire in questo caso $\frac{(a^2 - b^2)d - 2b^2r}{dr^2}$ minore di $\frac{\xi^2}{\beta^2}$, e però QC minore della CN ;

quindi l'arco $X5$, il quale porterebbe l'ombra sulla superficie conica $SBY3 - syq$, si trova nello spazio già ombreggiato dalla superficie conica $A1LC - mvl$, e conseguentemente l'estremo in quistione sarà portato interamente dall'arco che ha per icnografia $AW1$.

Dal punto della periferia $AWL - ml$, il quale ha W per icnografia, s'immaginino tirate due rette, l'una verticale, e l'altra parallela ai raggi di luce, e congiunti i punti ove queste rette incontrano il piano orizzontale della jz , e si avrà un triangolo rettangolo, il cui cateto orizzontale sarà eguale alla retta cq moltiplicata per la cotangente dell'angolo Σ , cioè al prodotto $cq \cdot \frac{\xi}{\cos. n}$; e però la distanza fra il punto C e l'icnografia di quello del piano orizzontale anzidetto, in cui cadrebbe l'ombra portata dal punto dell'arco avente W per icnografia, eguaglierà

$$cq \cdot \frac{\xi}{\beta} - a;$$

quindi, siccome nell'ipotesi comune si ha $cq = \frac{13}{8}a$, $\xi = 1$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, per cui risulta la detta distanza eguale ad

$$\frac{a}{16}(26\sqrt{2} - 16),$$

ed il raggio del fondo del pozzo, cioè $CZ = \frac{3}{16}a$, ed è evidentemente $26\sqrt{2} - 16$ maggiore di 3; così l'ombra portata dal punto della periferia $AWL - ml$, il quale ha l'icnografia in W , cadrà sulla superficie conica avente l'icnografia nell'anello compreso fra le due periferie circolari $B3Y$, $IQ\beta Z$.

Ora il punto dell'icnografia $BO3$, più vicino al C , è quello che trovasi nella retta ICT ; adunque il contorno dell'ombra in quistione non solo è portato dalla periferia circolare avente per icnografia AW_1 , ma cade anche interamente sulla superficie conica, la cui icnografia è l'anello compreso fra le due anzidette periferie circolari.

Per descrivere l'icnografia di questo contorno, cioè la qui richiesta, si tiri $\mu\xi\lambda$ orizzontale, $\lambda\Gamma$ parallela alla Cc ; indi si descrivano due archi, l'uno col centro C ed il raggio eguale alla $\mu\xi$, e l'altro col centro Γ e col raggio CM ; vale a dire si faccia per l'orizzontale $\mu\lambda$ ciò che si è fatto qui sopra per la fh , e nei segmenti di essi archi avransi due punti della icnografia dimandata $BO3$.

OSSERVAZIONE. Se l'arco SX risultasse maggiore della SB , il contorno dell'icnografia dell'ombra cadente sulla superficie conica, che ha per icnografia l'anello compreso fra le periferie $B3Y$, $IQ\beta Z$, sarebbe composto delle icnografie delle ombre portate su questa superficie dalle parti della periferia $BSY-sy$, che hanno per icnografia BX , 35, e di quella portata dalla porzione dell'arco $AW_1 - ml$ avente l'icnografia intercetta fra le parallele alla CI tirate pei punti B , 3. L'ultima di queste parti dell'icnografia richiesta si descriverebbe come sopra; e le prime, facendo per la periferia $BSY-sy$ ciò che si è fatto per $AW_1 - ml$ onde delineare le linee AB , 13.

Così, se risulterà $cq \cdot \frac{\xi}{\beta} - a$ minore di CZ , la parte più prossima al punto O della stessa linea $BO3$ cadrà nel piano del fondo del pozzo, e sarà questa una porzione della periferia circolare eguale perfettamente alla A_1L avente il centro in quel punto della WT in cui cadrebbe l'ombra portata dal punto $C-c$ sul piano dello stesso fondo.

In fine, se l'angolo che fanno i raggi di luce col piano orizzontale sarà maggiore dell' msi , la superficie conica avente per icnografia l'anello $AWLB Y$ sarà interamente in luce, ed il contorno dell'ombra che accadrà nel pozzo perverrà dall'ombra portata dalla periferia $B3Y-sy$; e sì l'icnografia che l'ortografia del medesimo contorno si descriveranno come si è veduto nella proposizione decimaterza suddetta.

Quest'ultimo caso succede sempre quando il pozzo consiste in un semplice tronco di cono rovesciato, come sono quei pozzi che si fanno alcune volte nei fossi e sulle banche, ecc.

DESCRIZIONE DELLA LINEA $b\delta t\theta$, CIOÈ DELL'ORTOGRAFIA DELL'ESTREMO DELL'OMBRA CHE ACCADE NELLO SPACCATO DELLA MEDESIMA SUPERFICIE CONICA AVENTE PER ORTOGRAFIA IL TRAPEZIO $syzj$.

Si conduca BP parallela alla I , l'estremo dell'ombra di cui si parla sarà l'ombra portata sulla detta superficie conica dalla linea composta dell'arco circolare avente PM per icnografia, della retta $MS-ms$, e da una parte della $SJ-sj$.

1. La parte $b\delta$, la quale esprime l'ortografia dell'ombra portata dall'arco avente PM per icnografia, si descriverà colla prima regola usata superiormente per descrivere l'arco ab .

Il termine inferiore della linea $b\delta$, il quale si trova nella $mr\delta$ parallela alla $d\nu$, si potrà anche determinare nel modo seguente, senza descrivere la stessa linea $b\delta$.

Conducansi (fig. 147) le 689, 78, 79, 76 parallele rispettivamente alle dl , mV , dv , CV , e le 9H, 6H parallele alle 67, I , e congiungasi $H8$; questa retta, ammessa la 69 l'asse comune ai piani ortografico ed icnografico, sarà la traccia icnografica del piano che passa per la 68-78 e per la 79-6H parallela ai raggi di luce. Ciò fatto (fig. 145 e 146), si tiri MU parallela alla 8H, $M\Delta$ alla CI , congiungasi $U\Delta C = cp$; e si tiri pel segmento Δ la $\Delta\delta$ parallela alla Cc , ed avrassi nel punto δ comune alle $\Delta\delta$, $m\delta$ il punto richiesto, proposizione decimaterza medesima.

2. Congiungasi la ISG , poi la CG ; tirisi ST parallela alla CD , e la Tt alla Cc , e la st alla O ; si unisca la $t\theta V$, e sarà $t\theta$ l'ortografia dell'ombra che porta $SJ-sj$ -- sulla superficie conica avente il trapezio $syzi$ per ortografia.
3. Descrivasi l'arco ellittico δt ortografia dell'ombra portata sulla detta superficie conica dalla retta $MS-ms$ coll'osservazione seconda della proposizione decimaquarta, parte terza, ovvero descrivasi la medesima, determinando un suo punto qualunque, come si è determinato poc' anzi il δ .

Non espongo per l'ortografia $abd\theta$ i diversi casi che possono succedere, sì per le dimensioni del pozzo che per la direzione dei raggi di luce, come ho fatto per l'icnografia, giacchè non farei che ripetere ciò che ho detto per questa.

Concludo pertanto che l'icnografia e l'ortografia dimandate saranno

$$ABO31WA, mab\delta t\theta jsm.$$

PROPOSIZIONE XXVI.

Trovare l'ombra che i parapetti della scala rappresentata dalla fig. 148, tav. XVIII portano sui piani ortografico ed icnografico, e sopra i gradini di essa.

Si tiri la cB parallela alla O , e dal punto C la parallela alla I ; se questa cadrà nella CL , che sega il prolungamento della aB , condotta BE perpendicolare all'asse ML , saranno cBa , $aBEC$ le ombre portate dal parapetto $Ca-ac$ sui piani ortografico ed icnografico: se passerà pel punto B , le ombre richieste saranno cBa , CBa ; e se essa retta segnerà la medesima aB , per esempio in l , tirata la perpendicolare alla ML , le ombre portate dallo stesso parapetto $Ca-ac$ sui piani ortografico ed icnografico saranno $cela$, $Cl a$.

Così si conduca hn parallela alla O , ed HA alla I ; e poscia le p , q , -- parallele alla Hh , e che prolungate passino pei segmenti P , Q , --, e si continui la linea spezzata rpq -- sino ad incontrare la retta hn , e si avrà l'ortografia dell'ombra portata sui gradini dal parapetto $Hr-rh$ nella figura agn -- qpr . Similmente tirinsi le G , I , N , -- parallele anch'esse alla Hh , e che i loro prolungamenti passino pei segmenti g , i , n , --; e continuisi

quest'operazione sino a tanto che la linea spezzata GIN -- seghi la retta HA , e sarà HPQ -- NIG -- l'icnografia dell'ombra portata sulla scala dal medesimo parapetto $Hr-rh$.

Nel caso dell'ordinaria direzione della luce le successive rette p, q -- hanno una distanza eguale alla larghezza di ciascun gradino, e le I, N -- eguale all'altezza dei medesimi; e però, siccome in tal caso ag eguaglia ah , così si potranno descrivere le ortografie e le icnografie in quistione, senza delineare l'altra di esse proiezioni.

OSSERVAZIONE 1. Se i raggi di luce illumineranno la parte posteriore del piano ortografico, il disegno ortografico sarà interamente in ombra, e gli estremi delle ombre portate dai parapetti sul piano icnografico e sopra i gradini saranno $OJDK$ --, $XSTV$ -- x -- $NI\Delta$ --, la cui determinazione è per sè evidente.

OSSERVAZIONE 2. Per avere le ombre che in quest'ultimo caso porta ciascun gradino sul suo immediatamente inferiore, si tiri $a\lambda$ parallela alla O , la λt alla hH , ed estendasi sino ad incontrare la $r\Delta$ parallela alla I , e conducasi la ts perpendicolare alla stessa hH ; indi si facciano le y_1, z_2 -- eguali alla rs , e tirinsi le I_1, N_2 -- parallele alla ML , e saranno queste gli estremi inferiori delle ombre qui richieste.

OSSERVAZIONE 3. Quando i raggi di luce avranno la direzione ordinaria, tanto le distanze y_1, z_2 --, quanto quelle delle successive linee G, I, N -- eguaglieranno l'altezza di ciascun gradino; e però in tal caso si potranno descrivere facilissimamente le linee GIN -- TSX, I_1, N_2 --, non che la $OJDK$ --, essendo le rette SD, DK parallele rispettivamente alle HC, Cc e distanti da queste quant'è l'altezza di ciascun parapetto sul piano icnografico; e tutto ciò si potrà fare senza disegnare l'ortografia della scala.

PROPOSIZIONE XXVII.

Ammessa l'ordinaria direzione dei raggi di luce, trovare l'icnografia dell'ombra che accade sulla scala espressa dalla figura 149.

Si seghi HB eguale all'altezza che ha sul ripiano $G\Delta$ il muro avente per icnografia $F\Delta$, e si tirino le rette BA, C, D -- parallele alla $F\Delta$, e che abbiano l'una dall'altra una distanza eguale all'altezza di ciascun gradino, e si continui la linea $ABCD$ -- sino ad incontrare la retta FE parallela alla I , e nella linea FE -- $DCBAA\Delta$ si otterrà l'icnografia dell'ombra cagionata dal muro anzidetto.

Similmente facciasi nu eguale all'altezza che ha il muro, avente per icnografia GnT , sul piano del gradino che ha mn , e poscia si costituisca la linea $numrst$ --, le cui parti mr, sl -- eguaglinò l'altezza di ciascun gradino, e le mu, rs -- siano parallele alla stessa Gn , e si estenda la medesima linea sino a segare la retta GH parallela alla I , e si avrà nella $GHlsrmun$ l'icnografia dell'ombra portata sui gradini della seconda rampa GM dal muro Gn suddetto.

OSSERVAZIONE 1. Se la linea $ABCD$ -- incontrasse la retta GX prima della EF , l'estremo dell'ortografia dell'ombra sarebbe costituito dalle linee FE , $ABCD$ -- continuate sino alla GX , e dalla parte della GX intercetta fra queste medesime due linee.

OSSERVAZIONE 2. Se la seconda rampa della scala sarà TQ in vece della CM , l'icnografia dell'ombra portata dal muro su di essa e sul ripiano che ha TnG per icnografia risulterà $GNPQczT$: questa si determinerà col fare GN parallela alla O , ed NP , PQ alle Cn , nT e distanti da queste quant'è l'altezza del muro che porta l'ombra sul ripiano; e le cd , yz , -- parallele anch'esse alla nT o PQ ed aventi una distanza l'una dall'altra eguale all'altezza di cadauno scalino. Così la linea 12, e le analoghe, la quale rappresenta l'icnografia dell'ombra portata dal terzo gradino sul secondo, si determinerà facendo $z1$ eguale all'altezza di un gradino, e tirando 12 parallela alla xz icnografia dello spigolo del medesimo gradino.

PROPOSIZIONE XXVIII.

La figura 150 rappresenta una rampa, un ripiano ed i corrispondenti parapetti di una scala ordinaria; quale sarà l'ombra cagionata da queste parti di essa scala sopra sè stessa, e sui due piani ortografico ed icnografico?

DELL' OMBRA PORTATA DAL PARAPETTO $TABC1 - yabc$ SOPRA DEI PIANI COORDINATI.

Lo spigolo che porta gli estremi dell'ombra qui dimandata è costituito dalle rette $A - ab$ verticale, $AB - b$ orizzontale, $BC - bc$ parallela per l'ordinario alla rampa della scala, e dalla orizzontale $C1 - c$: l'ombra medesima si avrà dunque colle regole esposte nei corollarj primo e secondo della proposizione prima della terza parte.

Si trovino, proposizione citata, i punti 6, 7, 8, 9 del piano icnografico, nei quali cadono le ombre portate dagli $A - b$, $B - b$, $C - c$, $1 - c$; si congiungano successivamente, e si avrà nella linea $A6789$ l'estremo dell'ombra portata dal parapetto $TABC1 - yabc$ sul piano icnografico. Così determininsi i punti 2, 3, 4, 5 del piano ortografico, nei quali cadono le ombre portate dai $C - c$, $B - b$, $A - b$, $A - a$; e si uniscano le rette $c2$, 23 , 34 , 45 , e nella $c2345$ avrassi il contorno dell'ombra portata dallo stesso parapetto $TABC1 - yabc$ sopra il piano ortografico.

OSSERVAZIONE. Se i piani ortografico ed icnografico rappresenteranno, l'uno il pavimento, e l'altro un muro, come succede generalmente, ai disegnatori abbisogneranno le sole linee $A6$, 67 , $7L$, $c2$, $2L$; cioè delle $A6$, 67 , 78 , 89 le anteriori alla linea ML asse, e delle altre $c2$, 23 , 34 , 45 le posteriori alla medesima ML ; e però potranno risparmiare le operazioni necessarie per la determinazione delle parti $L8$, 89 , $L3$, 34 , 45 : anzi, siccome le due rette 23 , 75 debbono segare in uno stesso punto la ML , perchè

sono le tracce del piano parallelo ai raggi di luce che passa per la $BC-bc$, si potrà tralasciare la determinazione di uno dei due punti 3, 8; giacchè trovato uno di essi, per esempio 8, nel segmento delle ML , 78 si avrà il punto L , il quale unito al 2 darà immediatamente la retta $2L$, senza verun bisogno del punto 3; e se si troverà 3 reciprocamente, non si avrà bisogno dell'8.

DELL' OMRRA CHE PORTA L' ALTRO PARAPETTO, CIOÈ $\Delta KEH\phi - Mkeh$
SUL RIPIANO E SUI GRADINI DELLA SCALA.

Le linee che portano i contorni di quest' ombra sono la verticale $K-ke$, l' orizzontale $KE-e$, la $EH-eh$, e l' orizzontale $H\phi-h$.

1. Si tirino le KI , EJ , HD parallele alla I , e le es , hg alla O ; si facciano le $\mu 7$, $\beta 3$ eguali alla differenza delle KT , $\alpha \xi$, e parallele alla ML , ed uniscansi le $\mu 8$, $\beta 3$: fatto ciò, si tiri gGD parallela alla Hh , DN alla 8μ , le Nn , np' , $p'P$, $P'P$ rispettivamente parallele alle Hh , $\beta 2$, Hh , 3μ , e la Pp anch' essa parallela alla Hh ; e poi conducansi le rette indefinite $NPQ--$, $npq--$, ed a queste le parallele $P'Q',--$, $p'q',--$; si uniscano le $Q'Q$, $q'q$, $--$, e così si continuino le linee spezzate risultanti $np'p'q'q--$, $NP'P'Q'Q--$ sino ad incontrare le rette es , EJ , ed avransi nella DG l' icnografia dell' ombra portata dalla $H\phi-h$, e nelle medesime linee spezzate $np'p'q'q--j$, $DNP'P'Q'Q--J$ l' ortografia e l' icnografia dell' ombra portata dalla retta $HE-he$.
2. Così pei segmenti $--$, s , s' , $--$ conducansi le $--$, S , S' , $--$ parallele alla Hh , e si otterrà nella linea spezzata $--SS'--$ estesa sino alle rette EJ , KI l' icnografia dell' ombra che porta sui gradini la $KE-e$; l' ortografia sarà nella stessa retta ji .
3. In ultimo tirinsi le $--$, r , r' , $--$ parallele anch' esse alla Hh , e che prolungate passino pei segmenti R , R' , $--$, e nella linea spezzata $krr'--i$ estesa sino a segare la retta js avrassi l' ortografia, e nella stessa RI l' icnografia dell' ombra che porta sui gradini medesimi la verticale $K-ke$.

OSSERVAZIONE. Se la $HE-he$ sarà parallela al piano della rampa della scala, come accade generalmente, le rette NPQ , npq risulteranno parallele alle HE , he ; e però in tal caso si potrà risparmiare la suddetta determinazione dei punti p , P , tirando immediatamente le rette NQ , nq pei punti N , n parallelamente alle stesse HE , he .

Adunque l' ortografia dell' ombra cagionata dal parapetto $\Delta KEH\phi - Mkeh$ sarà $anp'p'q'q--j--s's--irrk$, e l' icnografia della medesima $GDNP'P'Q'Q--J--SS'--IKEH\phi$.

PROPOSIZIONE XXIX.

Trovare le icnografie degli estremi delle ombre che porta sopra sè stessa la pianta di una scala a chiocciola, le cui pareti sono due superficie cilindriche ordinarie.

Le periferie circolari ACE --, BDF -- (fig. 151), aventi ambedue il centro in Δ , siano le icnografie delle pareti della scala, ed il gradino avente per icnografia tB sia il più alto, e si discenda la scala medesima pel verso fgh .

DELL' OMBRA CHE PORTANO GLI SPIGOLI DEI GRADINI SUI PIANI
DEI GRADINI IMMEDIATAMENTE INFERIORI.

Si tiri $\Delta\Sigma$ parallela alla I , costruiscasi l'angolo $\Sigma\Delta a$ eguale al Σ , cioè a quello che fanno i raggi di luce coll'orizzonte, e dal punto a , distante dalla retta $\Delta\Sigma$ quant'è l'altezza di ciascun gradino della scala, tirisi l' $a\theta$ perpendicolare alla stessa $\Delta\Sigma$; indi si conducano le $\theta b, \theta c, \theta d, \theta e$, -- parallele rispettivamente alle AB, CD, EF , --, e saranno queste le icnografie qui dimandate.

DELL' ICNOGRAFIA DEL CONTORNO DELL' OMBRA PORTATA
DALLA PARETE AVENTE ACE -- PER ICNOGRAFIA.

Dal punto x della Δa , ed avente dalla $\Delta\Sigma$ una distanza eguale all'altezza che ha la sezione della parete sul piano del gradino più alto, conducasi xy perpendicolare alla medesima $\Delta\Sigma$, e si facciano y_1, y_2, y_3 , -- eguali alla $\Delta\theta$ determinata poc' anzi; indi col raggio $A\Delta$ facendo centro successivamente in $y, 1, 2, 3$, -- descrivansi gli archi f, g, h , --: fatto ciò, si provi a far centro in --, $8, 9$, --, e col medesimo raggio $A\Delta$ a descrivere gli archetti --, o, p , --; e se questi cadranno nelle icnografie degli scalini --, ottavo, nono, -- discendendo, essi archetti rappresenteranno insieme ai primi f, g, h , -- le icnografie degli estremi delle ombre portate sulla scala dalla parete avente ACE -- per pianta od icnografia.

DELL' ICNOGRAFIA DELL' OMBRA PORTATA DALLA COLONNA DELLA SCALA
O SIA PARETE CHE HA PER ICNOGRAFIA BDF --.

Condotte le due rette n, m tangenti alla periferia BDF e parallele alla $\Delta\Sigma$, proverassi a far centro nei punti --, $7, 8$, -- e a descrivere col raggio della colonna gli archetti --, t, r, q , --; e se questi attraverseranno le icnografie dei gradini --, settimo, ottavo, --, come ho supposto nella figura,

sarà *Infrqm* -- l'icnografia del contorno dell'ombra cagionata dalla colonna della scala, e qui cercata.

OSSERVAZIONE. Se le pareti erette verticalmente sulle *ACE* --, *BDF* -- non saranno superficie cilindriche ordinarie, per determinare l'ombra visibile nella pianta della scala condurransi per un punto Δ , fissato (fig. 152) dovunque, le rette $\Delta\Sigma$, ΔE , ΔI , ΔM , ΔN , -- parallele, la prima alla *I*, e le altre rispettivamente alle icnografie *AB*, *CD*, *EF*, -- degli spigoli di quei gradini i quali potranno causare ombre sui loro immediatamente inferiori; e dal punto θ , trovato come sopra, si tireranno le θi , θa , θm , θn , -- perpendicolari alle ΔI , ΔM , ΔN , --; indi si condurranno le b , c , d , e -- parallele alle medesime *AB*, *CD*, *DE*, --, e le cui distanze da queste siano eguali ordinatamente alle perpendicolari θi , θa , θm , θn , --; e queste ultime rette saranno le icnografie delle ombre portate sui gradini dagli spigoli degl'immediatamente superiori.

Così, tirata per qualsivoglia punto Δ della pianta (fig. 151) la retta $\Delta\Sigma$ parallela alla *I*, e determinato il punto y come sopra, e le successive parti $y1$, 12 , 23 , -- eguali alla $\Delta\theta$, si copieranno in un foglio di carta staccato da quello della pianta della scala le linee *ACE* --, *BDF* -- ed il medesimo punto Δ , precisamente come trovansi nella pianta stessa, e poi si farà muovere questo foglio lungo la retta $\Delta\Sigma$, per modo che non ruoti, e che il punto Δ segnato in essi passi successivamente negli y , 1 , 2 , 3 , --, e si segneranno di mano in mano nella pianta della scala le parti t , g , h , -- p , o , -- q , r , s , -- delle copie delle linee *ACE* --, *BDF* -- disegnate in esso foglio; cioè nella stazione del punto Δ in y si segnerà l'arco t , nella stazione del medesimo punto Δ in 1 l'arco g , ecc. Le rette b , c , d , --, le curve t , g , h , -- p , o , -- q , r , s insieme alle altre rette m , n parallele alla $\Delta\Sigma$ e tangenti la pianta della colonna costituiranno le icnografie dei contorni delle ombre in quistione.

OSSERVAZIONE DECIMAQUARTA.

Quantunque le quistioni relative alla delineazione dei contorni delle ombre composte siano assai differenti le une dalle altre, nulladimeno nella soluzione di esse si potrà, anzi sarà generalmente utile, tenere l'ordine seguente: primo, conoscere indistintamente le specie delle superficie semplici che costituiranno la data, e prevedere su quali di esse potranno accadere le varie parti del contorno richiesto; secondo, scoprire di queste ultime superficie quelle loro proprietà che io usai nella seconda e terza parte per iscriverle geometricamente; terzo, descrivere le parti del contorno richiesto, le quali sono estremi delle ombre proprie di quelle

medesime superficie semplici in cui esse parti si trovano ; quarto , conoscere almeno due proiezioni per ciascuna di quelle linee le cui ombre portate costituiscono le altre parti dell'ombra composta ; quinto , finalmente individuare le superficie semplici nelle quali accadranno queste ombre portate , e delineare le medesime.

OSSERVAZIONE DECIMAQUINTA.

Finalmente , per delineare i contorni delle ombre in un disegno , il quale sia una copia qualunque di uno già ombreggiato , in vece di fare pel nuovo tutto ciò che si sarà fatto per descrivere i contorni delle ombre nel vecchio , basterà ricopiare i contorni delle ombre di questo precisamente come copieransi le altre sue linee onde formare il nuovo medesimo ; giacchè le linee costituenti i contorni delle ombre che accadono nelle figure simili , e similmente poste rispetto ai raggi di luce , sono esse medesime altrettante linee simili e similmente situate.

FINE.

NOTA DEI LEMMI.

LEMMA I.

Di una superficie cilindrica, conosciute le proiezioni di una sua direttrice e quelle di una parallela alle rette generatrici, trovare una traccia della medesima, per esempio l'icnografia.

Siano ab , AB (fig. 153) l'ortografia e l'icnografia della data direttrice, ed m , n quelle della parallela alle rette generatrici, ed ML sia la retta comune ai piani ortografico ed icnografico.

Conducasi Aaa perpendicolare all'asse ML , e dai punti a , A proiezioni di un medesimo della direttrice si tirino le rette ad , AD rispettivamente parallele alle m , n ; e dal punto d , dove la prima sega l' ML , tirisi dD perpendicolare alla stessa ML , e sarà D incontro di questa perpendicolare colla AD un punto della traccia icnografica della superficie cilindrica. In un modo similissimo si troveranno tutti gli altri punti della traccia medesima FDC .

Essendo a , A le due proiezioni di un medesimo punto della superficie cilindrica, e le rette ad , AD rispettivamente parallele alle m , n , saranno queste le proiezioni di una retta generatrice della medesima superficie; e per essere la dD perpendicolare alla ML , sarà D il punto ove la medesima generatrice incontrerà il piano icnografico; quindi esso punto apparterrà alla traccia dimandata, come ho asserito.

COROLLARIO 1. Se la direttrice sarà la stessa linea bae , conducendo ad parallela alla m , le aa , $d\delta$ perpendicolari alla LM , e la $a\delta$ parallela alla I , nel segamento delle due $a\delta$, $d\delta$, cioè in δ , avrassi un punto della traccia dimandata; anzi in questo caso, tirate le 14, 13, 43 parallele rispettivamente alle aa , δa , $a\delta$, nel segamento 3 si otterrà evidentemente un altro punto della medesima traccia $b\delta e$. Così, condotta la retta parallela alla δa e tangente la curva bae , essa risulterà anco tangente la traccia $b\delta e$.

COROLLARIO 2. Se la linea BAE — bae sarà un'ellisse, una parabola od un'iperbola, tale sarà anche la traccia descritta. Nel caso dell'antecedente corollario, ammesso che la linea bae sia una semiperiferia ellittica o circolare avente per asse be , ed a per centro, le rette ba , $a\delta$ saranno due semidiametri conjugati della semiperiferia ellittica $b\delta e$.

Nel caso medesimo se gli angoli δaL , ada siano semiretti, i triangoli rettangoli aad , add saranno isosceli, o sia sarà $aa = ad$, ed $ad = d\delta$; e però $d\delta = aa$, come la verticale 23 eguaglierà la 14; quindi, tirate le δa , 43 parallele alla ML ed eguali rispettivamente alle aa , 41, avransi in un tratto i punti δ , 3, -- della traccia richiesta.

In questo caso, se la linea bae sarà la semiperiferia circolare avente be per diametro, condotta la bo (fig. 154) eguale e perpendicolare alla be , la SPX che divida pel mezzo l'angolo OPM , e ad essa la perpendicolare Pu , e segata di quest'ultima la parte $PT=bs$, e tirata la uS parallela alla PO , si avranno nelle PT, PS due semiassi della traccia dimandata.

Di fatto si ponga $\delta P = \phi$, $\delta PM = \alpha$, $bP = aP = r$, e si avrà

$$dP = \phi \cos. \alpha, \delta d = \phi \sin. \alpha;$$

$$\text{e però } \overline{aP}^2 + \overline{aa}^2 = \phi^2 \sin.^2 \alpha + (\phi \sin. \alpha + \phi \cos. \alpha)^2 = \phi^2 (1 + 2 \sin. \alpha \cos. \alpha + \sin.^2 \alpha),$$

$$\text{o sia } \phi^2 (3 + 2 \sin. 2\alpha - \cos. 2\alpha) = 2r^2,$$

per essere $2 \sin. \alpha \cos. \alpha = \sin. 2\alpha$, e $\sin.^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. 2\alpha$.

Ora si nomini m l'angolo bPO , il quale ha per tangente -2 , e pongasi $2\alpha = m + x$, e si avrà $\cos. 2\alpha = \cos. (m + x) = (\cos. x + 2 \sin. x) : \sqrt{5}$,

$$\text{e } \sin. 2\alpha = \sin. (m + x) = (\sin. x - 2 \cos. x) : \sqrt{5};$$

e si sostituiscano nell'equazione dianzi trovata, in vece di $\sin. 2\alpha \cos. 2\alpha$, questi loro valori, ed otterrassi

$$\phi^2 (3 - \sqrt{5} \cos. x) = 2r^2.$$

Quest'ultima equazione insegna che il massimo valore di ϕ corrisponde ad $x = 0$, o sia ad $\alpha = \frac{1}{2} m = MPS$, ed il minimo ad x eguale a due retti, oppure ad $\alpha = \frac{1}{2} m + 90^\circ =$

bPT ; ed anche che il primo di questi valori è eguale ad $\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}+1)$, ed

il secondo ad $\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{(3+\sqrt{5})}} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$. Ma appunto si dimostra, come nella proposizione ottava della terza parte, che le rette bs, SP sono eguali rispettivamente ad $\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$, $\frac{r}{2}(\sqrt{5}+1)$; adunque le rette PS, ST saranno due semiassi dell'ellisse $b\delta e$, come ho asserito.

OSSERVAZIONE. Se la direttrice sarà in un piano perpendicolare alla ML asse, non si potrà descrivere la traccia $b\delta e$ colla regola generale esposta; in tal caso, supposto la direttrice BDL (tav. XV, fig. 155) adattata al piano icnografico, mediante un quarto di rotazione fatta intorno alla sua icnografia BM ; condotte le DF, pq , -- parallele alla ML , le FH, qr , -- alla I , e presa $CM=DF$, si tirerà CN parallela alla O , NH alla BM ; indi si condurranno le pr , -- parallele alla DH , che unisce D al segmento delle FH, NH , e si avranno in r, H , -- altrettanti punti della traccia richiesta.

Ai punti F, q , -- s'immaginino delle verticali eguali rispettivamente alle rette DF, pq , --, e congiungansi i loro termini superiori cogli H, r , --, ed avransi dei triangoli rettangoli in F, q , --. Questi triangoli rettangoli, i quali sono evidentemente paralleli e simili per avere intorno agli angoli retti i lati paralleli e proporzionali, stante la simiglianza degli altri DFH, pqr , --, avranno le loro ipotenuse fra loro parallele; e perciò siccome la

ipotenusa di quello che ha l'angolo retto in F è parallela alla $m-n$, o sia è dessa una retta generatrice della superficie cilindrica, per essersi fatto $CM=DF$, e le FH , CN , NH rispettivamente parallele alle I , O , BC ; così tutte le ipotenuse di essi saranno altrettante rette generatrici della medesima superficie cilindrica, e conseguentemente i punti H, r , -- sopra determinati, i quali trovansi nelle rette generatrici e nel piano icnografico, apparterranno alla traccia richiesta.

Nell'ipotesi che i raggi di luce abbiano l'ordinaria direzione, si ha $CM=MN=FD$, e però DH eguale e perpendicolare alla FD . Quindi, condotte le DH , pr , -- perpendicolari ed eguali rispettivamente alle FD , pq , --, avransi immediatamente i punti H, r , -- della traccia in quistione.

LEMMA 2.

Date le proiezioni di una direttrice di una superficie conica e quelle del suo vertice, determinare una traccia di essa, per esempio l'icnografica.

Siano BAE , bae (tav. XIV, fig. 153) le proiezioni della direttrice data, C , c quelle del vertice della superficie conica, ed ML sia la linea comune ai piani ortografico ed icnografico.

Dalle proiezioni A , a di uno stesso punto della direttrice siano tirate le rette AD , ad per le proiezioni del vertice, e dal punto d , dove la seconda sega LM , sia condotta perpendicolarmente a questa la dD , D segmento di quest'ultima retta colla AD sarà evidentemente un punto della traccia dimandata: in una maniera affatto consimile si determineranno anche gli altri punti della traccia medesima FDG icnografica.

LEMMA 3.

Il luogo geometrico del contatto fra una superficie di second'ordine qualunque ed una superficie cilindrica è una linea piana.

Siano x, y, z le coordinate di un punto della superficie di second'ordine, e suppongasì l'asse delle z parallelo alle rette generatrici della superficie cilindrica, e

$$z^2 + 2axz + 2byz + cx^2 + dy^2 + exy + 2fz + gx + hy + l = 0$$

l'equazione della medesima superficie di second'ordine.

Quest'equazione dà

$$z = -ax - by - f \pm \sqrt{\{(ax + by + f)^2 - cx^2 - dy^2 - exy - gx - hy - l\}},$$

cioè due valori dell'ordinata z per ogni valore delle x, y .

Ora egli è una proprietà esclusiva ai singoli punti di contatto delle due superficie che ad ogni valore delle x, y ne corrispondano due eguali della z ; ma i valori delle x, y , che hanno questa proprietà, sono quelli i quali annullano il radicale che entra nell'espressione della z ; adunque per essi sarà $z = -ax - by - f$,

$$\text{o sia } z + ax + by + f = 0;$$

equazione la quale esprime che sono in un medesimo piano e diametrale tutt'i punti di contatto fra la superficie di second'ordine qualunque e la cilindrica tangente ad essa.

COROLLARIO. La superficie cilindrica tangente ad una qualunque superficie di secondo ordine, avendo per una delle sue direttrici la stessa linea di contatto, la quale è di second' ordine perchè piana, sarà essa medesima una superficie di second' ordine.

LEMMA 4.

Facendo passare un piano lungo una retta avente i termini nella periferia della prima sezione, il quale sia perpendicolare al piano ortografico, esso farà alla superficie di second' ordine una sezione ellittica.

Sia CD (tav. XV, fig. 156) la retta per cui passa il piano segante.

Si conducano le rette EF , GH perpendicolari alla VT asse, e che seghino la retta CD avente i termini nella linea AVB ; e dai punti M , N , L , I s'immaginino condotte delle perpendicolari al piano $AVBT$ ed estese sino alla superficie di second' ordine, e denomininsi le loro lunghezze rispettivamente M , N , L ed I : analoghe denominazioni si useranno anche altrove.

Evidentemente si hanno le proporzioni

$$M^2 : \overline{MF}^2 = L^2 : EL \cdot LF, \quad N^2 : \overline{NH}^2 = I^2 : GI \cdot IH,$$

per essere ellittiche le sezioni orizzontali fatte lungo le rette EF , GH , e la

$$M^2 : \overline{MF}^2 = N^2 : \overline{NH}^2,$$

essendo queste medesime sezioni fra loro simili; adunque sarà

$$L^2 : EL \cdot LF = I^2 : GI \cdot IH, \quad \text{ovvero} \quad EL \cdot LF : GI \cdot IH = L^2 : I^2.$$

Ma qualunque sia la linea di second' ordine AVB , essendo le due corde EF , GH fra loro parallele, si ha

$$EL \cdot LF : GI \cdot IH = CL \cdot LD : CI \cdot ID;$$

quindi avrà luogo la proporzione

$$L^2 : I^2 = CL \cdot LD : CI \cdot ID,$$

la quale esprime che è anche ellittica la sezione fatta alla superficie di second' ordine dal piano immaginato secondo la CD ; ciò che ecc.

LEMMA 5.

Le sezioni fatte ad un' iperboloide dai piani perpendicolari all' ortografico e passanti per le rette EF , df parallele alla NP asintota (fig. 157) della prima sezione saranno parabole aventi i parametri reciprocamente proporzionali alle CF , cf , porzioni delle stesse EF , df , ed intercette fra i vertici C , c di esse parabole e la retta MN , altra asintota della medesima prima sezione.

Si tirino le corde GI , HL fra loro parallele e che seghino le rette EF , df .

Essendo la CD parallela ad un' asintota, e le GI , HL parallele fra loro, sarà

$$CD : CE = GD : DI : HE : EL; \quad \text{ma} \quad GD : DI : HE : EL = D^2 : E^2;$$

adunque sarà

$$D^2 : E^2 = CD : CE,$$

cioè paraboliche le sezioni fatte perpendicolarmente al piano AVB e parallele all'asintota NP ; ciò che volevasi dimostrare in primo luogo.

Così, per essere

$$FN \cdot CD : fN \cdot cd = GD \cdot DI : Gd \cdot dI, \text{ e } GD \cdot DI : Gd \cdot dI = D^2 : d^2,$$

ed anche $D^2 : d^2 = CD \cdot P : cd \cdot p$, P e p indicando i parametri delle due sezioni,

$$\text{sarà } FN \cdot CD : fN \cdot cd = CD \cdot P : cd \cdot p, \text{ o sia } FN : fN = P : p,$$

$$\text{oppure } P : p = cf : CF, \text{ per essere } cf : CF = FN : fN.$$

Vale a dire le sezioni paraboliche, di cui si parla, hanno i loro parametri reciprocamente proporzionali alle porzioni CF , cf delle rette FD , fd , nelle quali vi sono i loro assi, e che sono intercette fra i vertici rispettivi C , c e l'asintota MN , appunto come ho asserito in secondo luogo.

LEMMA 6.

Le sezioni verticali e parallele di una paraboloida ellittica avente le sezioni principali verticali sono parabole fra loro eguali.

Siano fatte alla paraboloida due sezioni orizzontali per le rette AB , $a'b'$ (tav. II, fig. 14), e l'inferiore sia rappresentata dall'ellisse $aebf$; e condotti i tre piani verticali lungo i due diametri congiugati hm , de ed alla corda fg parallela alla de ; ed i punti nell'altra sezione, orizzontale analoghi agli f , d , t , -- siano denominati rispettivamente f' , d' , t' , --, ed L quello nel quale la paraboloida viene incontrata dalla verticale che passa per l .

Essendo gli angoli asd , $a's'd'$ eguali, e le sezioni orizzontali simili, si ha

$$\overline{as}^2 : \overline{a's'}^2 = \overline{ds}^2 : \overline{d's'}^2; \text{ e però } TV : s'V = \overline{ds}^2 : \overline{d's'}^2,$$

per essere in virtù della prima sezione

$$\overline{as}^2 : \overline{a's'}^2 = TV : s'V,$$

cioè tutte le sezioni della paraboloida fatte pel suo asse sono paraboliche.

Similmente, per essere

$$\overline{fl}^2 : ml \cdot lh = \overline{ds}^2 : \overline{sh}^2, \overline{fl}^2 : m'l' \cdot lh' = \overline{d's'}^2 : \overline{s'h'}^2,$$

e per la similitudine delle sezioni orizzontali $\overline{ds}^2 : \overline{sh}^2 = \overline{d's'}^2 : \overline{s'h'}^2$ avrassi

$$\overline{fl}^2 : ml \cdot lh = \overline{f'l'}^2 : m'l' \cdot lh'.$$

Ma per la sezione verticale che passa per hm si ha

$$ml \cdot lh : lL = m'l' \cdot lh' : l'L; \text{ adunque sarà } \overline{fl}^2 : lL = \overline{f'l'}^2 : l'L$$

parabolica cioè qualsivoglia sezione piana verticale della paraboloida.

Così, essendo

$$\overline{fl}^2 : \overline{ds}^2 = ml \cdot lh : \overline{sm}^2, ml \cdot lh : \overline{sm}^2 = lL : TV, \text{ si avrà pure}$$

$$\overline{fl}^2 : \overline{ds}^2 = lL : TV.$$

Vale a dire nelle sezioni paraboliche fatte alla paraboloida da due piani verticali e paralleli i quadrati delle ordinate sono geometricamente come le corrispondenti ascisse; quindi le parabole medesime saranno fra loro eguali.

L E M M A 7.

Saranno altrettante iperbole simili le sezioni fatte ad un' iperboloide dai piani perpendicolari all' ortografico e condotti lungo a rette le cui parallele tirate pel centro della prima sezione cadono nell' angolo delle asintote della sezione medesima.

Le sezioni siano fatte lungo le due parallele rd , RD (tav. XV, fig. 158), e condúcansi le GI , HL parallele fra loro e seganti le due antecedenti.

Essendo

$$RD \cdot DP : RE \cdot EP = GD \cdot DI : HE \cdot EL, \text{ e } GD \cdot DI : HE \cdot EL = D^2 : E^2,$$

$$\text{sarà } RD \cdot DP : RE \cdot EP = D^2 : E^2,$$

e conseguentemente iperbole le sezioni fatte lungo la PE e le sue parallele.

Sia Q il centro della sezione fatta lungo la PE , e la lettera Q indichi il semiasse conjugato al PR , e la N l' analogo rispetto alla rp .

Per essere

$$RD \cdot DP : rd \cdot dp = GD \cdot DI : Gd \cdot dI = D^2 : d^2,$$

$$\text{sarà } RD \cdot DP : D^2 = rd \cdot dp : d^2.$$

$$\text{Ma } RD \cdot DP : D^2 = \overline{PQ}^2 : Q^2, \text{ ed } rd \cdot dp : d^2 = \overline{pN}^2 : N^2;$$

adunque sarà $\overline{PQ}^2 : Q^2 = \overline{pN}^2 : N^2$, ovvero $PQ : Q = pN : N$; sono adunque simili le iperbole in quistione.

L E M M A 8.

In fine le sezioni fatte alla medesima superficie di second' ordine con piani perpendicolari alla prima sezione e condotti lungo le due corde parallele e terminate CD , cd (fig. 159, 160 e 161) sono due ellissi anch' esse fra loro simili.

Si tiri il diametro GHh , che divide pel mezzo le due corde CD , cd , e lungo di esso s'immagini il piano perpendicolare all' ortografico; la sezione fatta da questo piano alla superficie sarà un' ellisse nell' ellissoide, una parabola nella paraboloid, ed un' iperbola nell' iperboloide, e avrà un diametro comune colla prima sezione; e però nell' ellissoide (fig. 159) ed iperboloide (fig. 160) sarà, indicando colle H , h delle linee analoghe a quelle rappresentate colle M , N , -- nel lemma quarto,

$$\overline{CH}^2 : \overline{ch}^2 = FH \cdot HG : Fh \cdot hG, \text{ ed } H^2 : h^2 = FH \cdot HG : Fh \cdot hG,$$

$$\text{o sia } \overline{CH}^2 : \overline{ch}^2 = H^2 : h^2,$$

e nella paraboloid (fig. 161) sarà

$$\overline{CH}^2 : \overline{ch}^2 = GH : Gh, \text{ ed } H^2 : h^2 = GH : Gh,$$

$$\text{ovvero } \overline{CH}^2 : \overline{ch}^2 = H^2 : h^2.$$

Quindi per tutte queste tre superficie si avrà

$$CH : ch = H : h;$$

vale a dire fra loro geometricamente proporzionali gli assi delle suddette sezioni ellittiche fatte lungo le corde CD , cd , e conseguentemente queste sezioni fra loro simili; ciò che ecc.

LEMMA 9.

Nell' ellisse e nell' iperbola dato l' angolo che fa una tangente con un suo asse, e nella parabola quello che fa coll' asse unico della medesima, trovare il punto di contatto.

Essendo (fig. 162, 163 e 164) dato l' angolo MTP che fa la tangente MT coll' asse TP , sarà conosciuto il rapporto delle rette TP , PM : sia questo n , cioè abbiassi $PT = n \cdot PM$.

E noto a tutti che nell' ellisse e nell' iperbola si ha

$$TP:BP=AP:CP, \text{ o sia } \overline{TP}^2:\overline{BP}^2=\overline{AP}^2:\overline{CP}^2; \text{ e però sarà}$$

$$n^2 \cdot \overline{PM}^2:BP \cdot AP=BP \cdot AP:\overline{CP}^2.$$

Come pure si sa che

$$\overline{PM}^2:BP \cdot AP=\overline{CD}^2:\overline{AC}^2, \text{ ovvero } n^2 \cdot \overline{PM}^2:BP \cdot AP=n^2 \cdot \overline{CD}^2:\overline{AC}^2;$$

adunque per ambedue queste linee si avrà

$$n^2 \cdot \overline{CD}^2:\overline{AC}^2=BP \cdot AP:\overline{CP}^2.$$

Ma per l' ellisse si ha evidentemente $BP \cdot AP=\overline{AC}^2-\overline{PC}^2$, e per l' iperbola $BP \cdot AP=\overline{PC}^2-\overline{AC}^2$; quindi, ponendo nell' ultima proporzione in vece del rettangolo $BP \cdot AP$ questi suoi valori, e componendo nella risultante, si otterrà

$$\overline{AC}^2 \pm n^2 \cdot \overline{CD}^2:\overline{AC}^2=\overline{AC}^2:\overline{CP}^2;$$

proporzione che dà immediatamente l' ascissa CP corrispondente al punto di contatto di quella tangente che fa coll' asse AC l' angolo dato.

Nella parabola si ha $TP=2 \cdot AP$, e per supposizione $TP=n \cdot PM$, o sia $PM=\frac{TP}{n}$;

adunque sarà $PM=\frac{2}{n} AP$. Ma nella medesima curva si ha anche $\overline{PM}^2=P \cdot AP$, P in-

dicando il suo parametro; adunque sarà $\frac{4}{n^2} \cdot \overline{AP}^2=P \cdot AP$; equazione dalla quale si de-

sume l' ascissa dimandata $AP=\frac{n^2}{4} \cdot P$.

OSSERVAZIONE I. Chiamate ac , cd , cp le linee di un' ellisse di un' iperbola analoghe alle tre AC , CD , CP delle figure 162 e 163, cioè ac , cd i semiassi, e la cp l' ascissa corrispondente al suo punto di contatto colla tangente che fa coll' asse ac l' angolo eguale alla MTP ; e replicando per queste nuove linee i ragionamenti fatti superiormente, si avrà

$$\overline{ac}^2 \pm n^2 \cdot \overline{cd}^2:\overline{ac}^2=\overline{ac}^2:\overline{cp}^2.$$

Ora da questa proporzione e dalla precedente si desumano le equazioni

$$\left(\frac{AC}{CP}\right)^2=1 \pm n^2 \left(\frac{CD}{AC}\right)^2, \left(\frac{ac}{cp}\right)^2=1 \pm n^2 \left(\frac{cd}{ac}\right)^2,$$

le quali danno $CP:AC=cp:ac$, qualora sia $CD:AC=cd:ac$; vale a dire le ellissi o le iperbole fra loro simili. Adunque nell' ellissi e nelle iperbole simili le ascisse CP , cp , non che le ordinate corrispondenti ai punti di contatto di quelle tangenti che fanno angolo fra loro eguali cogli assi omologhi, avranno con questi assi rapporti geometrici fra loro eguali.

Così, nominato p il parametro di un'altra parabola, ed ap l'ascissa analoga alla AP (fig. 164) e corrispondente al punto di contatto della tangente che fa l'angolo eguale all' MTP col prolungamento dell'asse, si avrà $ap = \frac{n^2}{4}p$, e combinando quest'equa-

zione alla stessa $AP = \frac{n^2}{4} \cdot P$, si otterrà la proporzione $AP : ap = P : p$, la quale esprime che le ascisse suddette sono proporzionali ai parametri di esse parabole.

OSSERVAZIONE 2. Quantunque non sarà difficile pel disegnatore la determinazione dell'ascissa AP in parti del modulo del suo disegno col sostituire alle rette date AC , CD le loro misure in parti del modulo medesimo, nulladimeno ecco come si può avere altrimenti la posizione del punto P coll'ajuto della riga e del fedel compasso, senza passare all'anzidetta noiosa sostituzione; e ciò per l'ellisse e per l'iperbola, le quali sono le due di queste tre linee che s'incontrano più spesso nelle arti.

LEMMA 10.

Dati due assi di un'ellisse, e l'angolo che deve fare una sua tangente con uno di essi, trovare l'ascissa su quest'asse corrispondente al punto di contatto.

Siano bd , de i due semiassi dati (fig. 165).

Facendo centro in d , si descriva il quadrante circolare bhf , si tirino le rette fg , ne perpendicolari alla df ; facciasi l'angolo fdg eguale al dato, e la retta ne eguale alla gf ; uniscasi dnh , e conducasi hc perpendicolare alla bd , e si avrà nella dc l'ascissa cercata.

Si tiri am tangente l'arco bme nel punto dove è segato dalla hc , ed uniscasi ah .

I triangoli simili ahc , ned danno $ac : ch = de : ne$, ovvero gf ; e la notissima proprietà delle ordinate hc , mc corrispondenti dell'ellisse e del circolo somministra $ch : cm = df : de$; adunque sarà $ac : cm = df : gf$, cioè l'angolo mad eguale all' fdg o sia al dato; quindi cd , ecc.

COROLLARIO. Condotta ha perpendicolare alla hd , e poscia am perpendicolare alla dg ; quest'ultima sarà evidentemente quella tangente dell'ellisse, la quale fa coll'asse ad l'angolo eguale al dato, ed m il punto di contatto.

LEMMA 11.

Dato l'asse, il vertice ed un altro punto di una parabola, trovare l'ascissa presa dal vertice e nell'asse, la quale corrisponda al punto di contatto di essa parabola con una retta facente coll'asse un angolo dato.

Sia xa l'asse (fig. 166) della parabola, x il suo vertice, e b l'altro punto dato di essa.

Si tiri ba perpendicolare alla xa , e si faccia l'angolo bea eguale all'angolo dato; indi si seghi ac quadrupla della ax , e conducasi en perpendicolare alla ce , la na eguaglierà l'ascissa dimandata.

Essendo $4na = \frac{\overline{ae}^2}{ax}$, e P parametro della parabola eguale ad $\frac{\overline{ab}^2}{ax}$, sarà $\frac{P}{4na} = \left(\frac{ba}{ae}\right)^2$.

Ma $\frac{P}{4na}$ esprime evidentemente il quadrato della tangente trigonometrica dell'angolo fatto coll'asse xa dalla toccante la parabola nel punto a cui corrisponde l'ascissa eguale alla an , ed $\left(\frac{ab}{ae}\right)^2$ il quadrato della tangente dell'angolo bea ; adunque ecc.

LEMMA 12.

Le sezioni fatte alla solita iperboloide a due foglie con piani paralleli e verticali sono tante iperbole e simili fra loro.

Faccio uso della medesima figura decimaquarta, tav. II, ritengo tutte le convenzioni dichiarate nel lemma sesto, più chiamo V' il vertice dell'iperbola opposta alla prima sezione, ed L' il punto dove la verticale LL incontra l'iperbola opposta alla sezione fatta alla foglia inferiore lungo la hm .

La prima sezione dà $as^2 : a's'^2 = VTV' : VtV'$, e la somiglianza delle sezioni orizzontali dell'iperboloide insieme all'eguaglianza degli angoli asd , $a's'd'$ somministra

$$\overline{as}^2 : \overline{a's'}^2 = \overline{ds}^2 : \overline{d's'}^2; \text{ adunque sarà } \overline{ds}^2 : \overline{d's'}^2 = VTV' : VtV',$$

cioè iperbole tutte le sezioni fatte all'iperboloide dai piani che passano pel suo asse verticale.

Essendo $\overline{fl}^2 : \overline{f'l}^2 = mlh : m'l'h'$, ed anche $mlh : m'l'h' = LlL' : Ll'L'$, sarà

$$\overline{fl}^2 : \overline{f'l}^2 = LlL' : Ll'L';$$

e conseguentemente tutte le sezioni fatte all'iperboloide con piani verticali saranno altrettante iperbole.

In ultimo, siccome $mlh : \overline{sh}^2 = LlL' : VTV'$,

ed $mlh : \overline{sh}^2 = \overline{lf}^2 : \overline{ds}^2$; così avrassi

$$\overline{lf}^2 : \overline{ds}^2 = LlL' : VTV';$$

vale a dire simili le sezioni fatte ad un'iperboloide da piani verticali condotti lungo le rette de , fg , o sia in generale simili tutte le sezioni piane verticali e parallele; ciò che ecc.

LEMMA 13.

Essendo piana una delle due sezioni di due superficie di second'ordine, lo sarà anche l'altra.

Riferite ambedue le superficie ai medesimi tre piani coordinati, e nominate x, y, z le coordinate di un punto qualunque di una di esse, ed s, t, u le analoghe dell'altra, saranno

$$y^2 + Ax^2 + Bz^2 + Cxy + Dxz + Eyz + Fy + Gx + Hz + L = 0,$$

$$t^2 + as^2 + bu^2 + cst + dsu + etu + ft + gs + hu + l = 0$$

le loro equazioni: A, a, B, b, C, \dots esprimono le quantità da cui dipendono le posizioni e dimensioni delle medesime superficie.

Facendo in queste equazioni z ed u eguali a zero, si ottiene

$$y^2 + Ax^2 + Cxy + Fy + Gx + L = 0,$$

$$t^2 + as^2 + cst + ft + gs + l = 0$$

per equazioni delle intersezioni del piano delle coordinate (y, x) e delle superficie di second' ordine; e però, supposto che il piano delle x, y sia quello della linea piana comune alle due superficie, le equazioni anzi esposte saranno simili, o sia sarà

$$A=a, C=c, F=f, G=g, \text{ ed } L=l.$$

Quindi le equazioni delle due superficie di second' ordine riferite a questi piani coordinati saranno

$$y^2 + Ax^2 + Bz^2 + Cxy + Dxz + Eyz + Fy + Gx + Hz + L = 0,$$

$$t^2 + As^2 + bu^2 + Cst + dsu + etu + Fs + Gt + hu + L = 0.$$

Pertanto riferendo anche le linee comuni alle due superficie di second' ordine a questi ultimi piani coordinati, e denominando x', y', z' le coordinate analoghe alle x, y, z di un loro punto qualunque, saranno esse linee espresse dalle seguenti equazioni:

$$y'^2 + Ax'^2 + Bz'^2 + Cx'y' + Dx'z' + Ey'z' + Fy' + Gx' + Hz' + L = 0,$$

$$y'^2 + Ax'^2 + bz'^2 + Cx'y' + dx'z' + ey'z' + Fy' + Gx' + hz' + L = 0,$$

oppure da altre dedotte da queste e loro equivalenti.

Sottraendo la seconda di queste equazioni dalla prima, si ha

$$\{(B-b)z' + (D-d)x' + (E-e)y' + H-h\}z' = 0, \text{ cioè } 0$$

$$z' = 0, \text{ ovvero } (B-b)z' + (D-d)x' + (E-e)y' + H-h = 0.$$

Ora le linee comuni alle due superficie debbono avere la proprietà di soddisfare l'una o l'altra di queste ultime equazioni; adunque, siccome la $z'=0$ è evidentemente una proprietà esclusiva a quella che trovasi nel piano delle x', y' , l'altra linea comune alle medesime superficie soddisfarà la seconda, cioè

$$(B-b)z' + (D-d)x' + (E-e)y' + H-h = 0;$$

e conseguentemente sarà piana anch' essa; ciò che è d'altronde evidente.

LEMMA 14.

Determinare quanti punti si vogliono della periferia ellittica avente per due semidiametri conjugati le rette ab, bc (tav. XV, fig. 167).

Sulla ae doppia della ab si descriva la semiperiferia circolare ame , e si tiri bd perpendicolare alla stessa ae , e congiungasi cd : fatto ciò, si conducano le mn, mr, nr parallele rispettivamente alle bd, cd, bc , e sarà r un punto della periferia ellittica dimandata.

I triangoli simili bcd, mnr danno $bc:bd = nr:mn$, ovvero $\overline{bc}^2:\overline{bd}^2 = \overline{nr}^2:\overline{mn}^2$; e però, essendo $ab=bd$, ed $\overline{mn}^2 = an \cdot ne$, sarà $\overline{bc}^2:\overline{ba}^2 = \overline{nr}^2:an \cdot ne$, che è una proprietà caratteristica dei singoli punti appartenenti all'ellisse avente per due semidiametri conjugati ab, bc . Ma come si è determinato il punto r , si possono trovare anche gli altri della medesima ellisse; adunque ecc.

LEMMA 15.

Senza descrivere l'ellisse che ha per assi ab , cd , trovare i suoi segmenti colle rette aif , drg parallele ad una data (fig. 168).

Descritta la periferia circolare $alsbq$, si prenda $eh = ec$, congiungasi hi , ed a questa tirisi la parallela al , e dal punto l la retta lp perpendicolare all'asse ab , che il punto m d'incontro di essa colla data fa sarà lo stesso punto dove quest'ultima incontrerebbe la detta ellisse.

Imperciocchè, essendo $lp : mp = ne : ie$, ed $ne : ie = ae : he$, ovvero come $ae : ec$, sarà $lp : mp = ae : ec$; e perciò il punto m apparterrà alla periferia ellittica avente per assi ae , ec .

Così, tirata qrs e la st perpendicolare all'asse ab , si avrà nel suo segmento x colla dg l'altro punto richiesto, per essere $st : xt = eq : ed$; e però $st : xt = ae : de$.

LEMMA 16.

Dato l'asse ed il vertice di una parabola, non che un altro punto di essa, per cui passa una data retta, determinare l'altro punto comune ad esse linee senza delineare la parabola.

Sia ab (fig. 169) l'asse, a il vertice della parabola; rd sia la retta data, ed r il punto dato comune a questa retta ed alla parabola.

Conducasi rf perpendicolare all'asse, rb alla retta ra ; si prendano an , am amendue eguali alla quarta parte della fb ; tirinsi le mu , nc perpendicolari rispettivamente alla bm asse, ed alla rd retta data; indi si tiri ct parallela alla mb , e si seghi td eguale alla rt ; d sarà il punto richiesto, cioè l'altro punto comune alla retta ed alla parabola.

Si tirino du , rs parallele all'asse, ed uniscasi rn .

Essendo an , am entrambi un quarto della fb parametro della parabola, sarà n il suo fuoco, ed mu la direttrice; e però $rn = rs$.

Sia h il nuovo segmento della retta cn e della periferia circolare che ha il centro in r , ed il raggio $rn = sr$, e sarà $nc \cdot ch = \overline{cs}^2 = \overline{cu}^2$. Ma $\overline{ud}^2 + \overline{uc}^2 = \overline{xd}^2 + \overline{cx}^2 = \overline{xd}^2 + cn \cdot ch + \overline{hx}^2$, o sia $\overline{ud}^2 + \overline{uc}^2 = \overline{hd}^2 + cn \cdot ch$; adunque

$$\overline{ud}^2 = \overline{hd}^2, \text{ ovvero } ud = hd = nd;$$

quindi il punto d sarà anch'esso nella parabola, come ho asserito.

OSSERVAZIONE. Se il punto r cadesse in a vertice della parabola, per avere il punto d bisognerebbe conoscere o il parametro di essa, ovvero un altro punto col quale si determinerebbe il parametro medesimo, facendo per questo punto dato ciò che si è fatto sopra per l' r : conoscendosi il parametro, si procederà alla determinazione del fuoco, della direttrice e dello stesso punto d richiesto precisamente, come sopra si è fatto.

In questo caso medesimo, se l'angolo fatto dalla retta data coll'asse della parabola eguaglierà quello che fa la diagonale di un cubo con una sua faccia, sarà evidentemente,

supposto dv perpendicolare alla mv , $\overline{dv}^2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{va}^2$. Ma per la parabola si ha $\overline{dv}^2 = bf \cdot av$; adunque avrassi $\frac{1}{2} \overline{va}^2 = va \cdot bf$, o sia $va = 2bf$; quindi, segata l'ascissa av doppia della fb , e condotta vd perpendicolare all'asse, si avrà immediatamente il segmento d .

LEMMA 17.

Essendo ABC , abc (tav. XVI, fig. 170) due semiperiferie ellittiche simili, ed AC , ac due loro assi omologhi, e gli angoli CAM , cam eguali, e le rette PM , pm perpendicolari alle AC , ac , sarà

$$AP : ap = AC : ac.$$

Siano BD , bd altri due semiassi omologhi.

$$\begin{aligned} \text{Nelle proporzioni } \overline{PM}^2 : AP \cdot PC &= \overline{BD}^2 : \overline{AD}^2, \\ \overline{pm}^2 : ap \cdot pc &= \overline{bd}^2 : \overline{ad}^2 \end{aligned}$$

date dalle curve, per essere eguali i secondi rapporti in virtù della simiglianza delle linee medesime, sarà

$$\overline{PM}^2 : AP \cdot PC = \overline{pm}^2 : ap \cdot pc.$$

Ma dai triangoli simili APM , apm si ha

$$\overline{PM}^2 : \overline{pm}^2 = \overline{AP}^2 : \overline{ap}^2 ;$$

adunque si avrà $\overline{AP}^2 : \overline{ap}^2 = AP \cdot PC : ap \cdot pc$, oppure $AP : ap = PC : pc$; e però componendo si otterrà $AP : ap = AC : ac$.

COROLLARIO. Se le periferie, in vece di essere ellittiche, fossero circolari, le rette AP , ap sarebbero come i diametri e come i raggi di esse periferie.

OSSERVAZIONE. Per le iperbole simili (fig. 171) si dimostra, come si è fatto per le ellissi, che $AP : ap = CP : cp$. In questa proporzione, dividendo, si ottiene la seguente $AP : ap = AC : ac$, la quale esprime una proprietà delle iperbole affatto simili all' anzi esposta per le ellissi.

LEMMA 18.

Descrivere l'ellisse di cui si conosce un asse, ed un punto per cui deve passare.

Sia ab l'asse, ed u il punto dato (fig. 172).

Si descriva la semiperiferia circolare acb , si tiri duf perpendicolare al suo diametro, si costruisca il triangolo equilatero ghl (fig. 173) sulla gl eguale alla df , prendasi ig eguale alla uf , e si tiri hid : fatto questo, tirinsi le mn , rs , -- perpendicolari alla ab , si prendano $h1 = h2 = mn$, $h3 = h4 = rs$, --, ed uniscansi le 12 , 34 , --; indi si seghino nt , sx , -- eguali ordinatamente alle 1α , 3β , --, ed avransi i punti f , x , -- dell'ellisse dimandata.

Imperciocchè, per essere le rette 12 , 34 , -- gl parallele, i rapporti $12 : 1\alpha$, $34 : 3\beta$, -- sono tutti fra loro eguali; e però $df : uf = mn : fx = rs : sx = ecc.$; quindi i punti u , s , x , -- appartengono all'ellisse dimandata.

COROLLARIO. Condotta pel punto p di mezzo della ab la pc perpendicolare ad essa ab , e presa $\lambda h = \mu h = cp$, congiunta $\lambda \mu$; indi segata pq eguale a $\lambda \delta$, oppure unita cdz , e poscia zuq , si otterrà nella pq l'altro semiasse della periferia di cui si parla. Così, unito il punto q al segmento dei prolungamenti delle cr , ab , si avrà una retta che incontrerà la rs nello stesso punto x sopra determinato: in un modo affatto affatto simile potransi avere anche i punti t , u , ecc.

LEMMA 19.

Nelle parabole ACD , acd (fig. 174), che hanno i vertici in A , a , e per assi le rette AP , ap , essendo gli angoli DAP , dap eguali, tanto le ascisse AP , ap , quanto le ordinate PD , pd corrispondenti ai segmenti D , d saranno geometricamente proporzionali ai parametri delle medesime.

I triangoli simili ADP , adp danno $AP:PD = ap:pd$; la proprietà caratteristica delle parabole somministra

$$AP:PD = PD:P, \quad ap:pd = pd:p,$$

P , p indicando i parametri di esse; e però sarà $PD:P = pd:p$,

o sia $P:p = PD:pd$, o come $AP:ap$; ciò che ecc.

LEMMA 20.

Trovare il punto ove la retta BM (tav. XVII, fig. 175) incontra nuovamente l'iperbola che ha per due semidiametri conjugati BC , CD .

Si estenda la retta BM sino alla CD , e la CB di $AC = BC$; si tiri CF perpendicolare alla AB ed eguale alla CD , facciasi $FG = CE$, ad essa la perpendicolare CH e la parallela AL ; si prenda $AI = GH$, $IL = HF$, congiungasi BI , e si conduca a questa la parallela LP , indi si tiri PM parallela alla CD , che il segmento M di essa colla data BM sarà il punto dimandato.

La retta BP si potrà determinare anche in quest'altra maniera:

Si trovi la terza proporzionale geometrica alle rette DE , CD , indi si determini la quarta proporzionale, pure geometrica, alle rette $CE + CD$, AB , e la terza proporzionale qui trovata; e questa quarta proporzionale sarà la lunghezza della retta BP .

Non espongo le dimostrazioni di queste due regole perchè sono esse immediate conseguenze delle notissime proprietà dell'iperbola.

Dati due semidiametri conjugati di un' ellisse ed un terzo qualunque, trovare il conjugato di questo senza descrivere la periferia ellittica.

Siano AB, BC (tav. XII, fig. 176) i due dati semidiametri conjugati, e BD sia il terzo, quello cioè di cui si dimanda il conjugato.

Colla regola notissima trovisi ED tangente l'ellisse, e pel centro tirisi ad essa la parallela BF : in questa retta cadrà evidentemente il semidiametro conjugato dimandato.

Per avere la lunghezza di questo semidiametro, si faccia (tav. XIV, fig. 177) $ab = AB, abc = ABC, bc = BC, abf = DBF, bn = BD$; tirinsi ad, cd, ai, nh parallele rispettivamente alle bc, ab, bf , ed uniscasi bgi ; indi conducasi if parallela anch'essa alla ab , e sarà bf la lunghezza dimandata, e per conseguenza $BF = bf$ il semidiametro conjugato richiesto.

Di fatto, essendo il parallelogramma nm equivalente all' fg , si ha l' $nbfh$ equivalente all' $abrm$, ovvero all' $abcd$, il quale è compreso dalle ab, bc eguali ai semidiametri conjugati AB, BC ; quindi sarà bf la lunghezza del semidiametro conjugato a quello che uguaglia bn , cioè di BD per la notissima proprietà singolare dell'ellisse che i parallelogrammi compresi dai semidiametri conjugati sono tutti fra loro equivalenti. Questo lemma si estende anche all'iperbola.

LEMMA 22.

I tre punti G, H, L segamenti (tav. XVII, fig. 178) delle corde AE, BF; AD, CF; CE, BD del medesimo circolo ACE sono in una stessa retta linea ST.

Congiunte le AF, CD , e tirate le GI, LP, GM, LQ, GN, LR perpendicolari rispettivamente alle AD, CF, AF, CD sulle quali cadono, si hanno i triangoli GAI, GAN, GFM, GFN simili ai quattro CLR, CLQ, DLR, DLP ciascuno a ciascuno; e però sarà

$$GI : GA = LR : CL, AG : GN = CL : LQ, \\ GM : GF = LR : DL, \text{ ed } FG : GN = LD : LP;$$

ma moltiplicando i termini delle prime due di queste proporzioni, si ha

$$GI : GN = LR : LQ;$$

e moltiplicando quelli delle altre due, si ha in vece

$$GM : GN = LR : LP; \text{ adunque sarà} \\ GI : GM = LP : LQ,$$

proporzione la quale esprime che i punti G, H ed L sono in linea retta; ciò che ecc.

OSSERVAZIONE. Nella proposizione enunciata e nella sua dimostrazione ho supposto il punto B tra A e C , ed il C tra B e D , ecc.; cioè ho ammesso tacitamente i punti A, B, C, D, E, F collocati successivamente l'uno dopo l'altro: questa particolare disposizione di sei punti denominati A, B, C, D, E ed F non è necessaria nè per l'enunciato della proposizione, nè per la sua dimostrazione; giacchè qualunque sia la disposizione dei sei punti A, B, C, D, E, F della circonferenza ACE , dimostrasi sempre ed in una maniera consimile a quella usata qui sopra, che i segamenti delle corde $AE, BF; AD, CF; BD, CE$ sono in una sola e medesima retta linea.

LEMMA 23.

Le corde $A'E'$, $B'F'$; $A'D'$, $C'F'$; $B'D'$, $C'E'$ di una medesima linea di second' ordine qualunque si segano in tre punti situati in una stessa retta.

Sia ACE (fig. 178) una delle sezioni circolari di una delle superficie coniche ordinarie che passano per la linea di second' ordine $A'E'C'$ data, ed A, B, C, D, E, F siano gl' incontri di questa sezione circolare con quei lati della superficie conica medesima che passano per gli A', B', C', D', E', F' della linea di second' ordine $A'E'C'$.

Le corde $A'E'$, $B'F'$; $A'D'$, $C'F'$; $B'D'$, $C'E'$ della linea di second' ordine essendo evidentemente nei piani che passano pel vertice del cono immaginato e per le rette AE , BF ; AD , CF ; BD , CE , i segamenti delle corde $A'E'$, $B'F'$; $A'D'$, $C'F'$; $B'D'$, $C'E'$ saranno nelle rette che uniscono i punti G, H, L al medesimo vertice; ma queste, per essere i loro termini G, H ed L in linea retta, trovansi tutte nel piano passante pel vertice e per la ST ; adunque i tre segamenti anzidetti, cioè quelli delle corde $A'E'$, $B'F'$; $A'D'$, $C'F'$; $B'D'$, $C'E'$, saranno essi pure in questo medesimo piano, e conseguentemente in linea retta, giacchè sono anche nel piano della stessa linea di second' ordine.

COROLLARIO. Se i tre segamenti delle rette $A'E'$, $B'F'$; $A'D'$, $C'F'$; $B'D'$, $C'E'$ saranno in una medesima retta, i sei punti A', B', C', D', E', F' troveransi in una stessa linea di second' ordine, o sia uno qualunque di essi sarà nella linea di second' ordine che passerà per gli altri cinque.

LEMMA 24.

Dati cinque punti di una linea di second' ordine ed una retta che passa per uno di essi, trovare l' altro punto comune a questa retta ed alla medesima linea di second' ordine, senza descrivere quest' ultima linea.

Siano A, B, E, D ed F (tav. XVIII, fig. 179) i cinque punti conosciuti della linea di second' ordine, ed EC la retta data.

Si congiungano AE , AD , BF , BD , indi CL ; e pel segamento H delle GHL , AHD si tiri la FHC , e si prolunghi sino ad incontrare la data EC , ed avrassi in C il segamento della retta CE colla linea di second' ordine, qualunque essa sia, che passa pei cinque punti A, B, E, D ed F .

LEMMA 25.

Determinare quanti punti si vogliono della linea di second' ordine che passa per cinque punti dati.

Siano (fig. 179) rappresentati i cinque punti dati dagli A, B, D, E ed F come nel lemma precedente.

Si tirino pel punto E tante rette EC, E_2, E_3, \dots quanti punti si vogliono della linea di second' ordine, e si congiungano le rette AE, AD, BF, BD come nel lemma antecedente, e si trovino i punti della AD , i quali sono nelle rette GL, Gn, Gr, \dots ; indi uniscansi questi punti $H, 4, 5, \dots$

col dato F , ed estendansi quest'ultime sino ad incontrare le prime EC , E_2 , E_3 , --, e si avranno nei segmenti C , 2 , 3 , -- altrettanti punti appartenenti alla linea dimandata.

OSSERVAZIONE. Ometto le dimostrazioni anche di queste ultime determinazioni perchè sono immediate conseguenze del corollario del lemma vigesimoterzo.

LEMMA 26.

Data l'ortografia AVB (tav. XVII, fig. 180) di una superficie di second'ordine avente verticale l'asse VT, e date le icnografie CT, FT degli assi di una sua individuata sezione orizzontale, trovare cinque punti 1, 2, 3, 4, 5 (fig. 181) posti in un medesimo piano, i quali siano disposti fra loro, come sono i cinque della sezione fatta ad essa superficie dal piano perpendicolare all'ortografico e condotto lungo la retta IKZ data.

Si trovi il punto D di contatto fra l'ellisse che ha per semiassi CT , FT , e la retta AD perpendicolare all'orizzontale AB , coll'osservazione seconda della proposizione terza della parte seconda o col corollario del lemma decimo; uniscasi il diametro DT , e trovisi la lunghezza del suo conjugato ET , lemma ventesimoprimo, e seghisi $Te = ET$; indi si tirino le orizzontali $OMPQ$, KN , e le verticali Iai , $MHbm$; congiungansi le BNG , BQR , e poscia le Gce , RSe ; si faccia $PH = PQ$, la verticale $QU = HM$; uniscasi PUX , e si determini il punto X colla verticale SX : fatto ciò, si seghi $k6 = KM$, $k7 = KI$, e la 71 eguale all' ai e perpendicolare alla uz ; tirinsi le $2a3$, $4k5$ perpendicolari anch'esse alla uz , prendasi $a2 = a3 = SX$, $k5 = k4 = Kc$, ed avransi in 1 , 2 , 3 , 4 , 5 i cinque punti dimandati.

Essendo AD perpendicolare alla AB e tangente l'ellisse che ha per semiassi CT , FT , sarà DTr l'icnografia della sezione verticale avente per ortografia la stessa AVB della superficie di second'ordine; e però la retta $iTr - IKZ$ rappresenterà quel diametro della sezione in quistione il quale ha un termine in $i - I$; e le rette tirate pe' punti K , $M - m$ perpendicolarmente al piano ortografico, e che hanno i termini nella superficie di second'ordine, saranno segate pel mezzo del diametro stesso $IZ - ir$, per essere parallele alla retta tangente la sezione medesima nel punto $I - i$.

Così, per essere $k6 = KM$, $k7 = KI$, e $71 = ai$ e perpendicolare alla kz , l'angolo $k17$ eguaglierà quello compreso dal diametro $IZ - ir$ e dalla tangente anzidetta tirata pel punto $I - i$; e le $k1$, $k\alpha$ saranno le lunghezze delle parti del medesimo diametro intercette fra il punto K e gli $M - m$, $I - i$; e perciò ponendo il piano della sezione in quistione sul piano uhy , ed in modo che nella $k1$ cada il diametro $IK - iT$, secondo le rette $2a3$, $5k4$ cadranno quelle tirate pei punti $M - m$, K , e delle quali si è parlato dianzi.

Ora, per essere tanto le rette BT , KN , PQ , quanto le ET , K , P diametri omologi delle sezioni simili orizzontali che passano pei punti T , K , P , si ha

$$BT:ET = KN:K = PQ:P;$$

e per costruzione si ha $BT:Te$, ovvero $TE = KN:Kc = PQ:PS$; adunque sarà $Kc = K$, e $PS = P$; cioè le distanze fra i punti P , K alla superficie di second'ordine eguali rispettivamente alle Kc , PS sopra determinate.

Similmente, nominando $2M$ la corda comune alle sezioni fatte alla superficie di second' ordine lungo le OQ , IZ e perpendicolari al piano ortografico, avrassi, per essere la prima di esse sezioni un'ellisse,

$$\overline{PQ}^2 : P^2 = OM \cdot MQ : M^2, \text{ o sia } \overline{PQ}^2 : \overline{PS}^2 = \overline{MH}^2 \text{ oppure } \overline{QU}^2 : M^2; \text{ e perciò}$$

$$PQ : PS = QU : M.$$

Ma si ha evidentemente $PQ : PS = QU : SX$; adunque sarà $M = SX$. Quindi, essendo $\alpha 2 = \alpha 3 = SX$, e però eguale ad M , e $k 5 = k 4 = Kc$, e conseguentemente alla K , i cinque punti 1, 2, 3, 4, 5, i quali sono in uno stesso piano, saranno disposti come sono i cinque della sezione in quistione, i quali cadono in $I-i$, e nei termini delle corde, le cui metà si sono denominate rispettivamente M , K ; ciò che ecc.

COROLLARIO 1. Trovato il segmento y della retta $38y$ e della linea di second' ordine che passa pei punti 1, 2, 3, 4, 5, ora conosciuti, *lemma ventesimoquarto*; e condotta yz perpendicolare alla uz , indi segata KZ eguale alla kz , nel punto Z si avrà evidentemente l'ortografia di quello della superficie di second' ordine, in cui sarebbe essa incontrata nuovamente dalla retta tirata pel termine anteriore della corda $2M$ che ha l'ortografia nella IZ e fa colla stessa IZ l'angolo eguale al 683.

Se quest' ultima retta fosse parallela alla $O-I$, Z sarebbe l'ortografia del punto della superficie di second' ordine, nel quale cadrebbe l'ombra portata dal termine anteriore della suddetta corda $2M$.

COROLLARIO 2. Se la superficie di second' ordine sarà collocata in modo che AVB rappresenti una delle sue principali sezioni, per esempio quella avente CT per icnografia, sarà nullo l'angolo iku ; e però $k1$ cadrà nella stessa uk . E nel caso che la medesima superficie sia di rotazione, oltre le proprietà qui enunciate, sarà anche $K = KN$, ed $M = MH$; quindi i cinque punti 1, 2, 3, 4, 5 determinabili facilissimamente.

LEMMA 27.

Data la traccia ortografica MFL (tav. IX, fig. 87) di una superficie cilindrica che ha le rette generatrici parallele alla $O-I$ comunque diretta, trovare la traccia che fa la medesima superficie al piano verticale passante per M e perpendicolare alla retta orizzontale ML , comune ai piani ortografico ed icnografico.

Dai termini della verticale DF si tirino le FG , DE parallele rispettivamente alle O , I , si prenda l'orizzontale GO eguale alla ME , ed O sarà un punto della traccia richiesta, ammesso che siasi adattata al piano ortografico col rotare intorno alla verticale MC : gli altri punti di essa traccia si avranno in un modo affatto simile, ovvero unendo la FO , e tirando poscia le fg , go , fo parallele ordinatamente alle FC , CO , FO , giacchè o segmento delle ultime due di queste sarà anch'esso un punto della traccia medesima. Questo secondo modo richiede nelle operazioni una grande precisione per essere acuti gli angoli FOG , fog , ecc.

Si supponga condotta la verticale df , la de parallela alla I , e le DF , df estese sino in N , n .

Essendo le rette DE , FG parallele alle I , O , saranno E , G le proiezioni del punto d'incontro del piano che passa per M perpendicolarmente alla ML colla retta parallela alla $I—O$ condotta pel punto F ; e perciò la distanza da questo incontro al piano MFL o sia al punto G sarà eguale alla ME . Quindi essendosi fatta l'orizzontale $GO = ME$, il punto O determinato sopra sarà della traccia in quistione, supposto che la medesima siasi adattata al piano ortografico mediante una rotazione fatta attorno alla verticale MG .

La costruzione dà $GO : go = GF : gf = GN : gn = ME : Me$,

cioè $GO : go = ME : Me$;

e però, per essere $GO = ME$, sarà anche $go = Me$. Quindi il punto o determinato sopra apparterrà anch'esso alla traccia dimandata al pari dell' O .

COROLLARIO. Se l'angolo MDE sarà semiretto, si avrà $MD = ME$, e però il punto O coinciderà coll' N del prolungamento della DF ; e se sarà anche semiretto MCF , si avrà di più $FN = GN$; e pertanto, fatte le verticali NF , nf eguali rispettivamente alle distanze FR , fr dei punti F , f dalla verticale MG , avransi in N , n immediatamente altrettanti punti della traccia di cui si parla.

LEMMA 28.

Trovare la traccia ortografica della superficie cilindrica che ha le rette generatrici parallele alla medesima retta $O—I$, e per direttrice la curva colla quale si confonde la BTL (tav. X, fig. 91) facendo un quarto di rotazione indietro attorno alla verticale AB .

Si tiri AP parallela alla O , si faccia $A\Delta = AC$, ΔE parallela alla I , EFG verticale, e la sua parte FG eguale alla verticale CD , e G sarà un punto della traccia richiesta: anche per questa traccia gli altri suoi punti si potranno determinare come il punto G , oppure operando con grande precisione, conducendo cf parallela alla CF , e facendo la verticale fg eguale alla cd , giacchè il punto g e gli altri similmente determinati apparterranno ad essa traccia.

S'immagini la figura BTL collocata nella direttrice, e si comprenderà, per essere $A\Delta = AC$, ΔE parallela alla O , ed EF verticale, che F sarà l'incontro del piano ortografico colla parallela alla $I—O$ tirata per la nuova posizione del punto C ; e però, siccome la FG è parallela ed eguale alla CD , sarà G l'incontro del piano ortografico colla parallela alla $I—O$ condotta pel punto della direttrice in cui è passato il punto D ; e per conseguenza G sarà anche un punto della traccia dimandata.

Ma, per essere cf parallela alla CF , ed fg parallela ed eguale alla verticale cd , il punto g sarà pel d ciò che è G pel D ; adunque ecc.

COROLLARIO. Se l'angolo ΔEA sarà semiretto, come succede quando le rette generatrici siano parallele alla direzione ordinaria dei raggi di luce, si avrà $EA = A\Delta = AC$; e però, se la curva BmM sarà eguale perfettamente alla LTB , risulterà $GF = CD = Em$;

quindi, in questo caso, si guadagnerà in semplicità, descrivendo la linea MmB in vece della BTL ; giacchè, condotta AP parallela alla O , e prese nelle verticali EG , eg , -- le parti FG , fg , -- eguali alle altre loro parti Em , ex , --, avransi immediatamente in G , g , -- i punti della traccia richiesta.

LEMMA 29.

Essendo le rette AF , AN , FN (tav. XVIII, fig. 182) eguali alle af , an , fn , ciascuna a ciascuna, le FP , fp perpendicolari alla fF , e gli angoli PFN , pfn fra loro eguali, le due rette AP , ap perpendicolari alle FP , fp saranno parti di una medesima retta.

I due triangoli AFN , afn eguali perfettamente danno l'angolo $AFN = afn$; e però sarà anche AFP eguale all' afp , per essere PFN eguale al pfn ; quindi i due triangoli rettangoli AFP , afp , i quali hanno le ipotenuse eguali, non che gli angoli AFP , afp , danno FP eguale ad fp , o sia le AP , ap fra loro per diritto, come ecc.

OSSERVAZIONE. Così se saranno le BF , BN eguali alle bf , bn , e le BQ , bq perpendicolari alle PQ , pq , ovvero alla medesima pq , anche queste coincideranno, e per le stesissime ragioni.

LEMMA 30.

Di una superficie di rotazione che ha l'asse verticale, conoscendosi la sua ortografia e quella di una sua apertura qualsivoglia, trovare l'icnografia di questa.

Sia (fig. 93) MVL l'ortografia della superficie, ed fkv quella della sua apertura, ed ML la retta comune ai soliti piani coordinati.

Si tiri l'orizzontale GH , la verticale Ir , descrivasi l'arco circolare hRF col centro T e col raggio eguale alla GH , e si avrà in R un punto della icnografia dimandata.

L'icnografia del punto della superficie di rotazione, il quale ha l'ortografia in r , deve essere evidentemente nella periferia orizzontale avente il centro in T ed il raggio eguale alla GH ; sarà adunque nella hRF descritta col centro T alla distanza eguale alla GH . Ma debb'essere anche nella verticale Ir ; quindi si troverà in R segamento di queste due linee, come ecc.

COROLLARIO. Se l'apertura avente per ortografia dkf , in vece di essere posteriore al piano della sezione fatta alla superficie pel suo asse e parallela al piano ortografico, cioè MVL , come ho tacitamente supposto qui sopra, fosse anteriore al medesimo piano, l'icnografia del punto che ha per ortografia r sarebbe l'altro segamento della retta Ir coll'arco descritto col centro T e col raggio eguale alla GH .

OSSERVAZIONE. Se si conoscesse l'icnografia RKF , e si volesse l'ortografia; descritto l'arco Rh facendo centro in T e col raggio TR , tirate le hH , rR parallele alla VT , indi l'orizzontale GH , sarebbe l'incontro r evidentemente un punto dell'ortografia richiesta.

LEMMA 31.

Trovare una sezione orizzontale della superficie spirale generata da una data linea piana, conoscendosi l'elice percorsa dal punto individuato del piano della generatrice medesima, e supposto che l'elice stessa sia ordinaria ed abbia l'asse verticale.

Si vegga la figura 104, tavola XI.

Si tiri Bb verticale, $b1$ orizzontale, e si descriva la linea 413 eguale perfettamente alla generatrice, e che o sia il punto individuato di essa che percorre l'elice $DBC-dbc$: fatto ciò, si conducano le verticali Dd , 605, e l'orizzontale $c52$, e si seghi il prolungamento DF della AF eguale alla 25, ed il punto F apparterrà alla linea $FE7$ eguale perfettamente alla sezione orizzontale della superficie spirale fatta ad essa dal piano orizzontale passante per $b1$.

S'immagini trasportata la superficie 316 per modo che il punto o cada nel $D-d$, la retta $o1$ secondo la $DF-ds$, e la $o3$ secondo $D-dc$: in questa situazione, per essere $o1=ce=de$, il punto 5 coinciderà coll' e , la retta 52 sarà nel piano orizzontale che passa per $1b$, ed avrà per icnografia DF ; e però il punto F icnografia della nuova posizione del punto 2, il quale si trova e nel detto piano orizzontale e nella superficie spirale, apparterrà all'icnografia della sezione fatta alla medesima superficie dal piano orizzontale condotto lungo $1b$. Ma l'icnografia di questa sezione eguaglia perfettamente la sezione medesima; adunque ecc.

COROLLARIO 1. Se la retta $c2$ incontrasse la linea 429 anche in 9, segato $D9$ eguale alla 59, sarebbe 9 un altro punto della sezione richiesta. Fatto BE eguale al 10, sarà E un punto della linea medesima: così, condotta l'orizzontale $d64$, e segato il prolungamento $C7$ della AC eguale alla 46, il punto 7 apparterrà anch'esso alla linea in quistione.

COROLLARIO 2. Se la retta 10 sarà un asse della linea generatrice 429, la ABE lo sarà della linea $FE7$ richiesta; per cui descritta la parte di questa, che cadrà da una banda della retta AE , agevolmente descriverassi anche l'altra senza usare la regola esposta.

OSSERVAZIONE. Essendo ordinaria l'elice che percorre il punto individuato del piano della generatrice della superficie spirale, tutte le sezioni orizzontali della superficie stessa saranno fra loro eguali; e però anche la traccia icnografica di essa superficie sarà eguale perfettamente alla $FE7$.

LEMMA 32.

Data la generatrice ABC (fig. 106) di una superficie de' canali, non che la EFLG (fig. 105) sua ortografia, cioè la direttrice EMF percorsa dal punto di mezzo dell'orizzontale AC, e la sua parallela LHG rappresentante la parte superiore della superficie medesima, trovare l'intersecazione fatta ad essa superficie dal piano perpendicolare all'ortografico e condotto lungo la retta HM qualunque.

Si tirino le $1b$, $2d$, $3f$, -- normali alla curva GHL , le $1a$, $c2$, $s3$, -- perpendicolari alla HM ; facciasi $Bg=b1$, $Bl=d2$, $Bn=f3$, --, e si

conducano le gh , lm , nr , -- parallele alla AD ; indi si seghino $a1 = gh$, $c2 = lm$, $s3 = nr$, --, ed i punti a , c , s , -- evidentemente saranno della sezione $HacsN$ dimandata, supposto adattata al piano ortografico col rotare attorno alla HM .

Suppongasì segata la superficie dal piano che passa per la $3f$ ed è perpendicolare all'ortografico; la sezione sarà eguale perfettamente alla linea ABC ; e però condotta dal punto 3 la perpendicolare al piano dell'ortografia, ed estesa sino alla superficie, sarà essa eguale alla nr , per essere $Bn = f3$. Quindi, essendosi fatto $s3$ perpendicolare alla HM ed eguale alla rn , sarà s un punto della sezione dimandata; ma ciò che si è detto del punto s vale per gli a , c , --; adunque la linea Hac , -- sarà, come ho asserito, la sezione richiesta.

LEMMA 33.

Data l'elice direttrice di una superficie elicoidica e la linea generatrice della medesima superficie, trovare la sua traccia icnografica.

Sia (fig. 109) LDE l'ortografia, ed Lde l'icnografia dell'elice direttrice, ed XRZ la linea (fig. 108) generatrice, ed Y il punto di questa che percorre la $ADE - Ade$, cioè il punto di mezzo della XZ .

Facciasi dAD perpendicolare alla ML comune sezione ai soliti due piani coordinati, la dH normale in d alla Lde , dK eguale alla AD , l'angolo dNK eguale a quello fatto col piano icnografico dalla tangente l'elice in $d - D$; tirisi IdV tangente in d l'icnografia Lde , PQ perpendicolare alla IV , YR alla XZ , TY eguale alla KN , SV parallela alla stessa XZ , in fine le NQ , NP eguali amendue alla ST , e saranno P , Q due punti della traccia dimandata.

Si sovrapponga XRZ al piano icnografico ed in modo che la retta SV cada sopra la sua eguale QP , e la TY cada secondo la NV ; in questa situazione la figura $XSRVZ$ sia rappresentata dalla $OQIPJ$, sarà NV eguale alla NK , per essere VN eguale alla TY , e questa alla KN .

Facendo rotare la figura OIJ attorno alla retta PQ di un angolo eguale al VNK , ed in maniera che $OQPJ$ si disponga sotto del piano icnografico, V passerà nel punto $D - d$ dell'elice direttrice, la retta OJ sarà nella orizzontale che ha l'icnografia in dH , ed il piano OIJ rotante si troverà perpendicolare all'elice medesima; e però la linea OIJ si confonderà colla generatrice della superficie elicoidica che passa pel punto $D - d$; quindi i due punti P , Q , per essere in questa linea generatrice e nel piano icnografico, saranno, come si è asserito, due punti della traccia icnografica della superficie elicoidica.

OSSERVAZIONE. Condotta dI tangente al punto d dell'icnografia Lde , e la dAD perpendicolare alla ML asse; presa bk eguale alla DA , e fatto l'angolo bkn eguale a quello che fa col piano icnografico la tangente in $D - d$ dell'elice $Lde - LDE$, ed esteso il lato nk sino ad incontrare bn perpendicolare alla bk ; e presa dN eguale alla bn , e la YT eguale alla nk , e tirata PQ perpendicolare alla dI , e la SV alla YR ; in ultimo fatte QN , NP eguali alla ST , avransi i punti P , Q della traccia in quistione. In un modo simile si potranno avere anche gli altri.

Se le tangenti l'elice faranno angoli eguali col piano icnografico, come succede per le volte delle ordinarie scale a chiocciola, gli angoli analoghi al bkn riesciranno tutti fra loro eguali, e però fra loro parallele tutte le rette simili alla nk .

NOTA

DELLE OPERE PUBBLICATE SUI CONTORNI DELLE OMBRE.

Mémoire sur les Propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, etc. Par GASPARD MONGE.
Si trova nella collezione intitolata: *Mémoires de mathématique et de physique*. Paris, 1775.

La science des Ombres par rapport au dessin. Par M. DUPAIN L'AÎNÉ. Paris, 1786. La parte di quest'opera relativa ai contorni delle ombre non merita di esser letta.

Leçons élémentaires des Ombres. Par M. DE LA GARDETTE. Paris, 1797.

Regole del Chiaro-oscuro in architettura di CARLO AMATI. Milano, 1802.

Saggio teorico-pratico intorno alla determinazione delle ombre nei diversi soggetti d'architettura geometrica. Firenze, 1805.

Problema grafico: così intitolò il sig. TRAMONTINI un eccellente suo opuscolo inserito nella prima parte del tomo pubblicato nel 1807 dalla Società Italiana delle Scienze.

Delle Projezioni grafiche e delle loro principali applicazioni. Trattato teorico-pratico, ecc. del medesimo autore. Il capo sesto del libro primo della seconda parte di quest'opera è un complesso di proposizioni relative ai contorni delle ombre. Modena, 1811.

Teoria dell'ombreggiare e metodo di acquerellare di LEANDRO MARGONI, architetto e professore di ornato nell'Accademia di belle arti in Bologna. Bologna, 1811.

Études d'Ombres, à l'usage des écoles d'architecture. Par C. STANISLAS L'ÉVEILLÉ, ingénieur en chef des ponts et chaussées. Paris, 1812.

Geometria descrittiva di FRANCESCO TACGANI. L'arte di ombreggiare gli oggetti è una parte di quest'opera. Milano, 1813.

Nel secondo tomo dell'opera intitolata: *Correspondance sur l'École polytechnique* si trova un'applicazione della *Théorie des ombres au dessin des machines* fatta dai signori HACHETTE e FRANÇAIS. Paris, 1813.

Facilis et universalis delineatio geometrica umbrarum, quas corpora rotunda præsertim architectonica vel in semetipsis patiuntur, vel sibi invicem inferunt, vel aliunde mutantur, lumine a puncto unico ubivis posito dimanante.

Dissertatio lecta coram Instituto scientiarum a J. B. MAGISTRINI pontificii archigymnasii bononiensis superioris matheseos professore. Bononiæ, anno MDCGCXVI.

OSSERVAZIONE. Sebbene il lettore, fornito di tutte le operette qui citate, possa vedere a chi si debbono gli enunciati e le soluzioni di quelle proposizioni relative ai contorni delle ombre che furono trattate prima di quest'epoca; non ostante, in altra occasione più opportuna della presente, penso di pubblicare la breve istoria dei progressi di questa nuova ed interessante scienza, affinchè possa chiunque facilissimamente soddisfare questa nobile curiosità.

APPENDICE ALL' ERRATA CORRIGE.

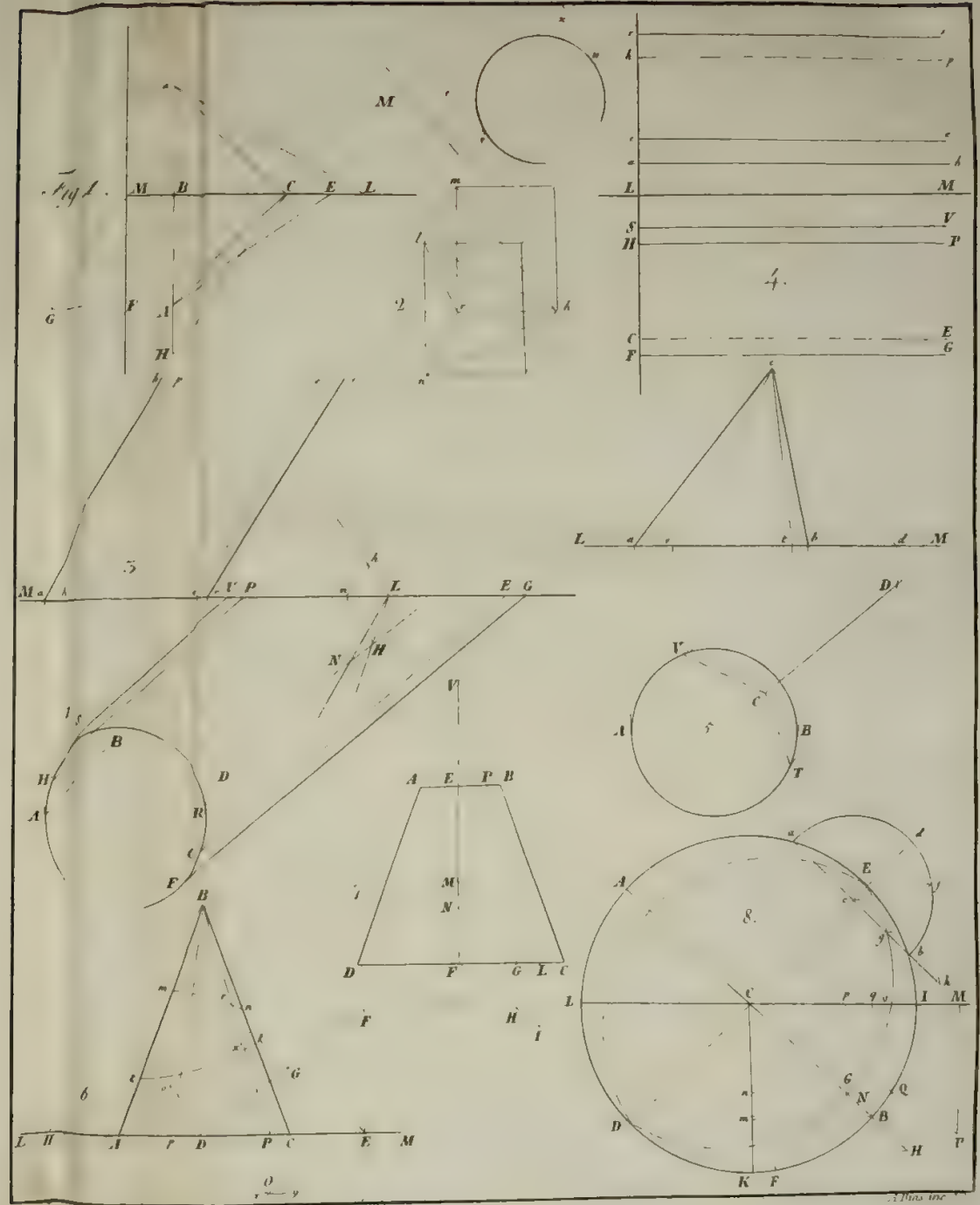
Pag. lin.	ERRORI.	CORREZIONI.
14 16	<i>AEBD</i> sia	<i>AEBD</i> (fig. 8) sia
17 21	un asse comune	l' asse reale comune
21 32	ventiquattresimo	quindicesimo
23 32	<i>Mc</i>	<i>M_i</i>
31 35	ciò, si	ciò, tirisi <i>I' AI</i> parallela alla <i>I</i> , si
37 22	<i>B' P'</i>	<i>B' L'</i>
60 22	<i>acd</i>	<i>acr</i>
65 35	<i>CF</i> ,	<i>CD, CF</i> ,
67 17	<i>f</i>	<i>P</i>
33	ortografie, e <i>v</i> , <i>bac</i> le icnografie	icnografie, e <i>v</i> , <i>bac</i> le ortografie
72 29	diciassettesimo	diciottesimo
75 42	ortografia	ombra
78 17	<i>IN</i>	<i>In</i>
84 5	, di cui parlerò	parlerò
85 35	<i>AB</i>	<i>A' B'</i>
41	<i>d' Pd</i> , si	<i>d' Pd</i> riferite al diametro <i>Pp</i> , si
89 6	<i>GH</i>	<i>mH</i>
90 40	<i>z, y, x</i>	<i>z, x, y</i>
104 33	<i>Fan</i>	<i>FaN</i>
106 18	alla <i>GH</i> ,	alla <i>GE</i> , si tiri l' orizzontale <i>QZ</i> a destra della <i>RP</i> ed eguale alla <i>GB</i>
19	<i>Q</i> e col raggio <i>OQ</i>	<i>Z</i> e col raggio <i>OZ</i>
27	nella proposizione	nell' osservazione 3 della proposizione
107 17	<i>BTL</i>	<i>BTL</i> , (ciascuno degli archi descritti coi centri analoghi agli <i>F, f</i> , — segnerà la linea <i>TSV</i> in due punti, perchè le ordinate <i>CD, cd</i> sono in generale maggiori delle rette analoge alle <i>FG</i> , <i>fg</i> , --)
34	asse;	l' asse medesimo;
109	<i>Kb</i>	<i>Ib</i>
112 6	duodecima	undecima
113 3	anzidetta	duodecima
37	e la parallela <i>DM — dn</i>	e la parallela alla <i>DM — dn</i> tirata da un punto della stessa generatrice
130 29	Si prenda <i>3b = BM</i>	si prenda <i>9b = BL</i>
29	<i>3b</i>	<i>BM</i>
31	. Così, si seghi <i>nc = BP</i> , col cen- tro <i>c</i> e col raggio <i>cn</i> facciasi	Così col medesimo centro <i>b</i> e col raggio <i>BP</i> , cor- roll. 4, prop. 38, parte terza
34		<i>si levi</i>
132 13	prop. seconda	prop. prima
24	trentesimanona	trentesimottava
32	e però unendo	e però, se il punto <i>I</i> cadesse in <i>i</i> , unendo
133 7	si faccia l' angolo	si faccia la retta <i>bc' d'</i> parallela alla <i>O</i> , l' angolo
9 }	<i>cedfii</i> --	<i>c'd'fii</i> --
16 }		
20	trentesimanona	quarantesima
22	dell' altro modiglione	del piano dell' altro triglifo
25	pel punto <i>μ</i>	per ambedue i punti <i>μ, b</i>
Per evitare la confusione, nella quale si potrebbe cadere, si disegni anche l' icnografia del pezzo di cornice in quistione, e poi si determinino i contorni dimandati mediante l' osser. seconda, prop. sesta, parte terza, approfittando di tutte le semplificazioni che hanno luogo, osser. prima, prop. pri- ma, parte anzidetta.		
37	<i>yh, hx</i>	<i>yh, hx</i> . Se la scozia non sarà segata dal piano orizzontale della <i>ny</i> , l' arco <i>st</i> sarà una conti- nuazione dell' <i>yx</i> .
136 13		<i>EI</i> esprime la solita <i>ML</i>
137 28	trentesimaprima	vigesimanona

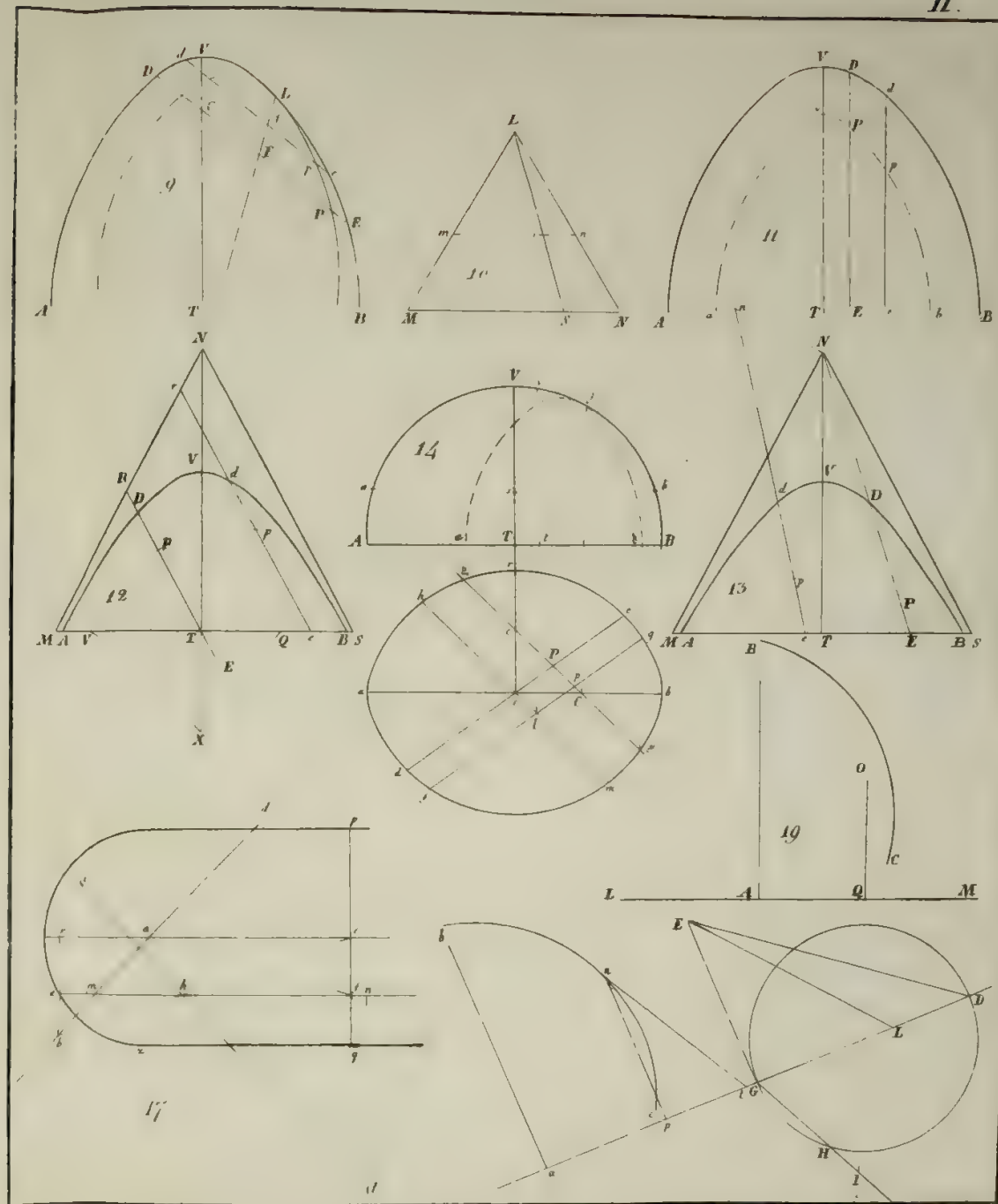
Pag. lin.	ERRORI.	CORREZIONI
140 2	<i>BV</i>	<i>FV</i>
141 18	fig. 111	fig. 112
26	alla <i>ns</i>	alla <i>ns</i> ed uniscasi <i>IS</i>
144 6	fa	fa coll' orizzonte
146 2	trentesimaquinta	quindicesima
152 6	congiungasi $U\Delta C=cp$;	congiungasi il segmento della $U\Delta C=cp$ che è più lontano dal punto <i>M</i> ;
154 7	<i>TNG</i>	<i>GMQ</i>
8	<i>O</i>	<i>I</i>
9	altezza ripiano	altezza sopra il ripiano
156 23	-- 8, 9, --	-- 6, 7, 8, --
33	-- settimo, ottavo, --	-- quinto, sesto settimo, --
157 10	ΔI ,	ΔE , ΔI
159 5	sino alla pag. 161 invece di <i>I</i> , <i>O</i> leggasi	<i>n</i> , <i>m</i>
164 3	le cui parallele tirate pel centro della prima sezione cadono nell' angolo	la cui parallela tirata pel centro della prima sezione cade nell' angolo
165 17	e componendo nella risultante,	nella risultante componendo per l' elisse e dividendo per l' iperbola,
166 14	l' ascissa	ascissa presa in quest' asse e dal centro
15	(fig. 165)	(fig. 165) e <i>bd</i> quello col quale una tangente deve fare un angolo dato
167 12	{ <i>Vt V'</i>	<i>Vs' V'</i>
14		
36	si ottiene	si ottengono
173 16	<i>E' F'</i>	<i>C' F'</i>
16	{ diametro	semidiametro
17		
177 18	l' asse verticale	l' asse verticale nel piano ortografico
30	<i>dkf</i>	<i>rkf</i>
178 16	01	05
23	9	9'
179 18	<i>dNK</i>	<i>dKN</i>

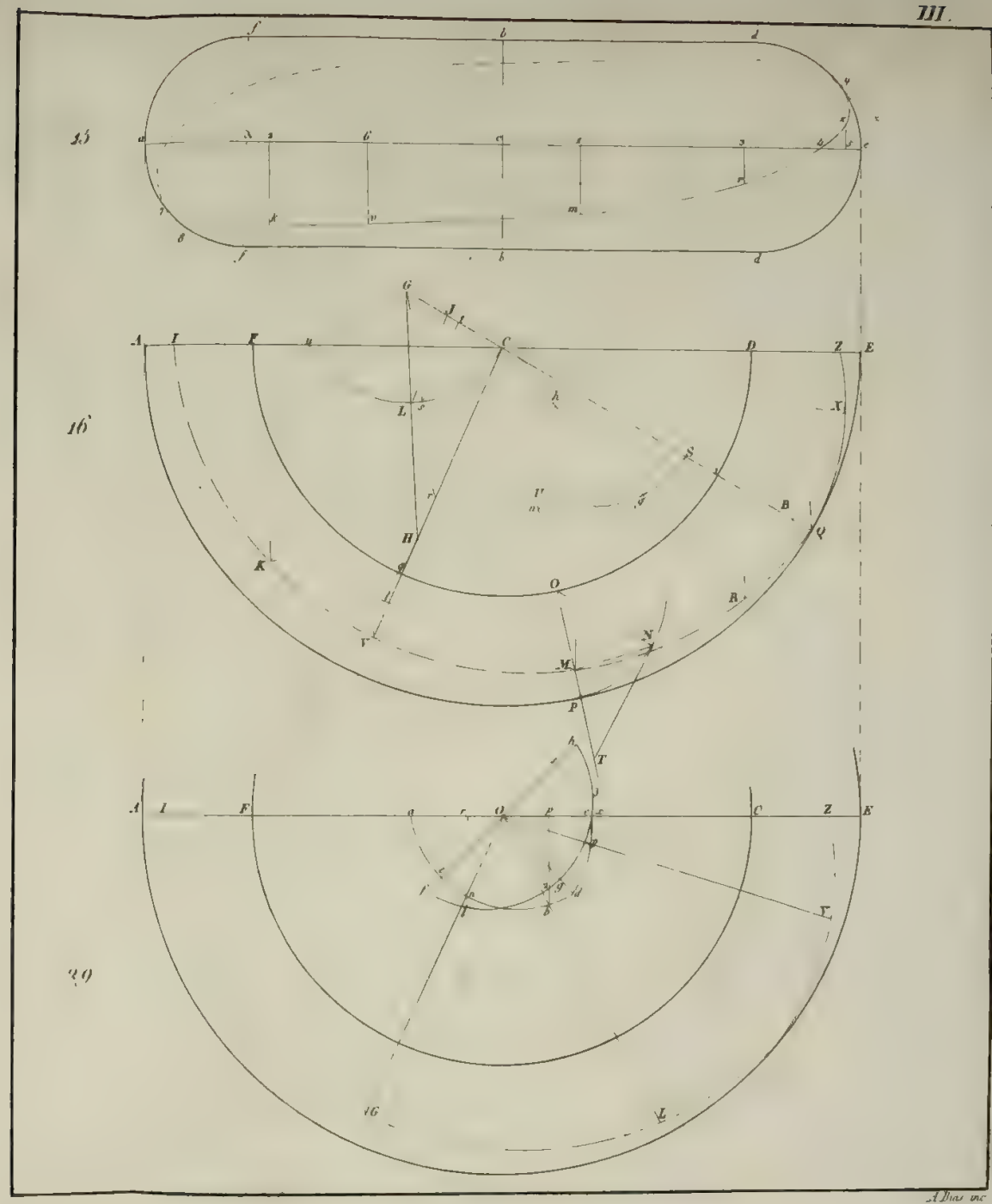
nella fig. 27. all' altro termine dell' arco *CD* si legga *E*
28 la retta *dp'* deve cadere nell' angolo *pdM*
67 la retta *BR* deve passare sotto il centro *F*
92 le *x*, *y*, *z*, più vicine al β debbono esser accentate
118 s' intenda la cifra 9 al punto comune ai prolungamenti delle *xv*, *Bb*
120 manca la retta *c' d'* che ha il termine *c'* nella -- *nc* --, e l' altro nella *dfi*; e manca anche la lettera *l* dove l' orizzontale *hg* incontra la verticale *y4*
122 il punto *i* cadrà fra 5 ed *N*
129 invece di *e* si legga *c*
169 ove si segano le rette *cn*, *rd* vi dev' essere *x*

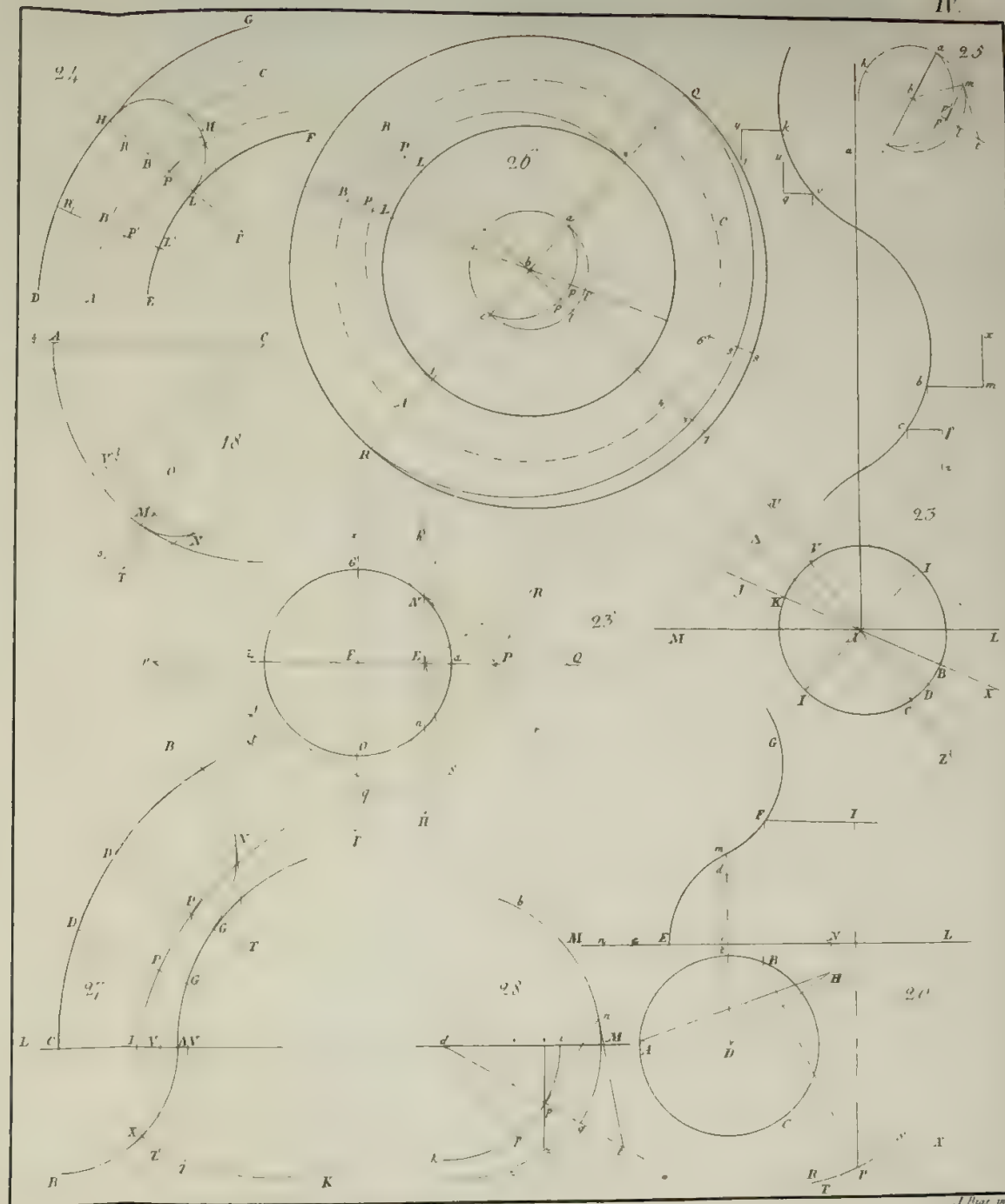
Allorchè in quest' opera si suppongano date due proiezioni di una linea, per es. l' ortografia e l' icnografia, come si fa alla linea trentunesima della pag. 3, s' intendono dati non solo i disegni di esse proiezioni, ma anche l' ordine successivo, o sia il verso, a seconda del quale si debbono considerare i punti delle medesime proiezioni, onde indicare quella tale obbiettiva; e per conseguenza non è indifferente l' ordine col quale si debbono scrivere le lettere poste sopra due proiezioni di una obbiettiva, quando esse si scrivono per indicare l' obbiettiva medesima; di modo che, ad esempio, la spirale indicata dalla scrittura *EFG—ABC* (fig. 20) è diversa da quella indicata dalla consimile *EFG—ACB*, indicando la prima una spirale avvolta al cilindro verticale avente per base il cerchio *ABC* più che essa si avvolge al medesimo pel verso *tBC* --, mentre l' altra indica una spirale bensì avvolta anch' essa allo stesso cilindro, ma pel verso *ACB* -- affatto contrario. Pertanto credo bene di avvertire anche gli errori seguenti, i quali potrebbero cagionare oscurità:

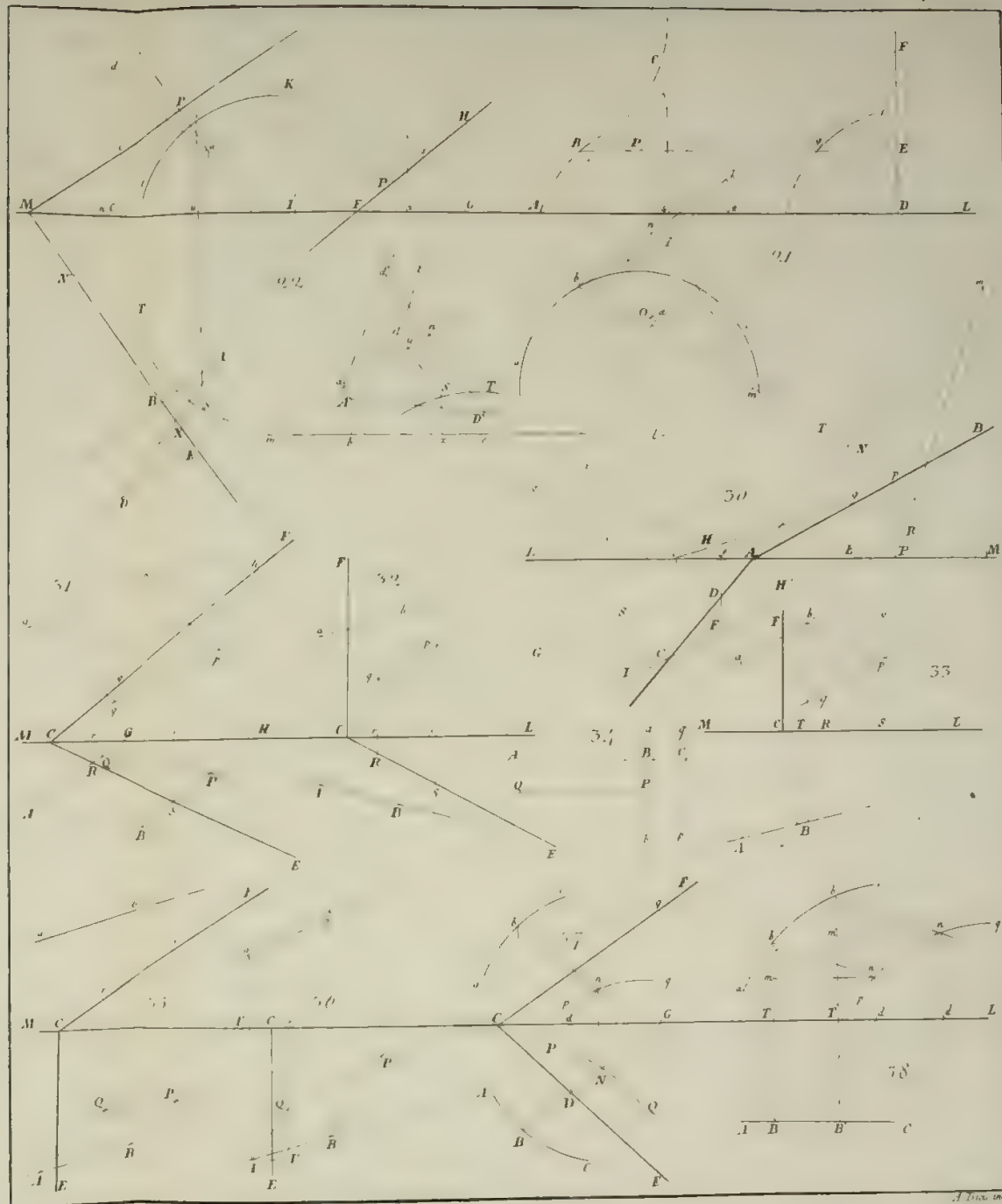
61 4	<i>ghl</i>	<i>lhg</i>
62 4	<i>ghl</i>	<i>lhg</i>
105 36	<i>RKF</i>	<i>FKR</i>
116 7	<i>EAE</i>	<i>eAE</i>
177 35	<i>RKF</i>	<i>FKR</i>

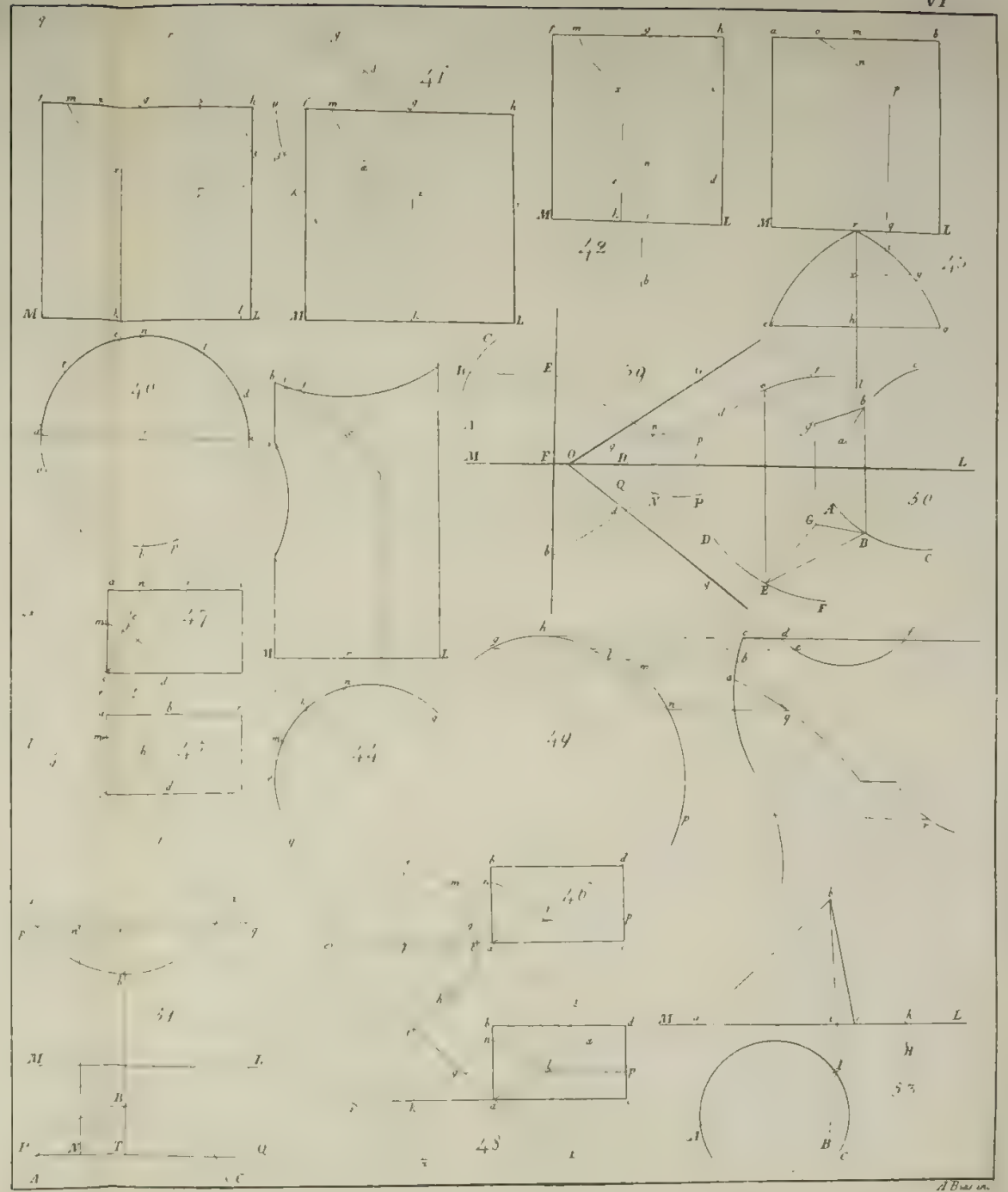


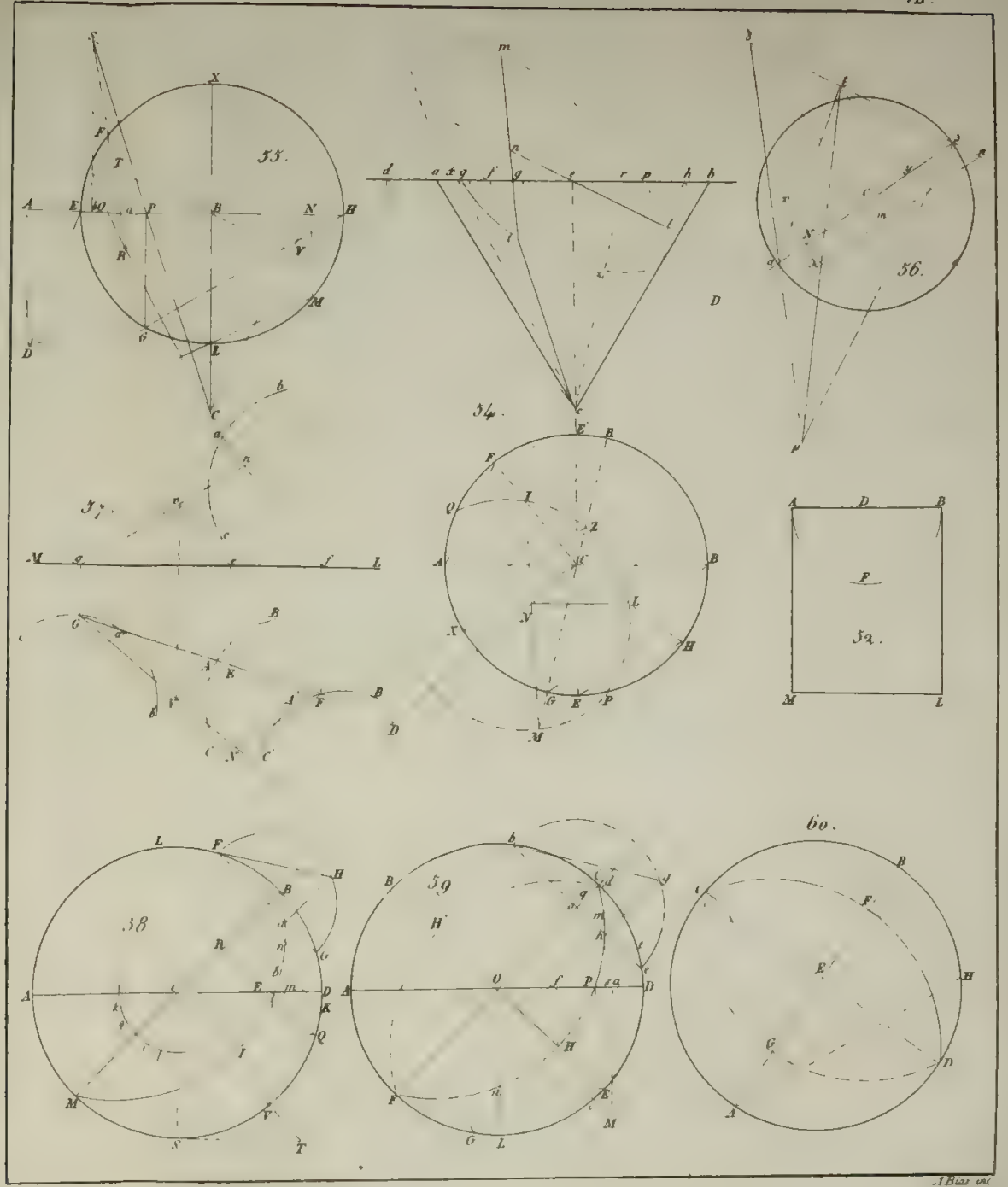


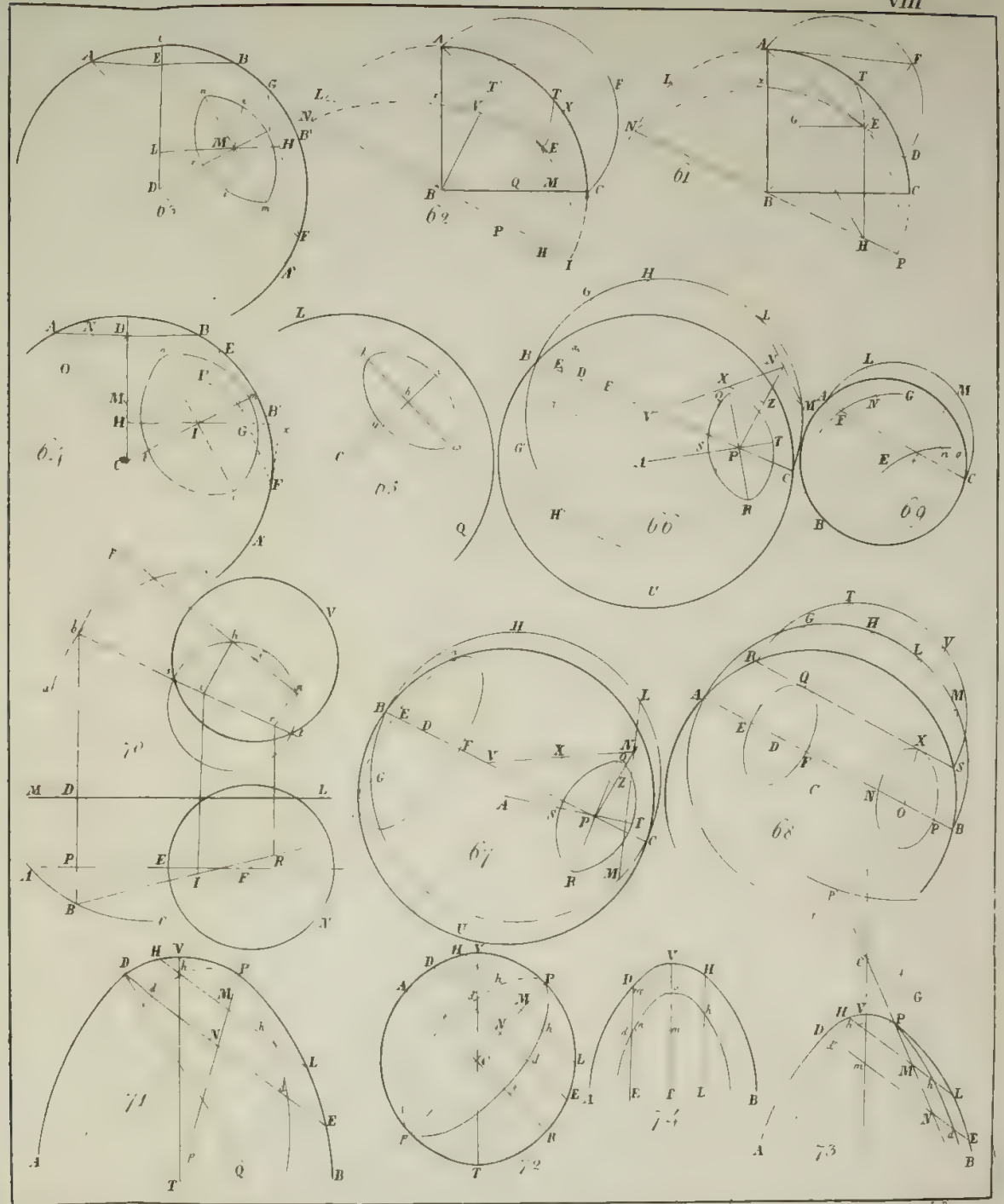


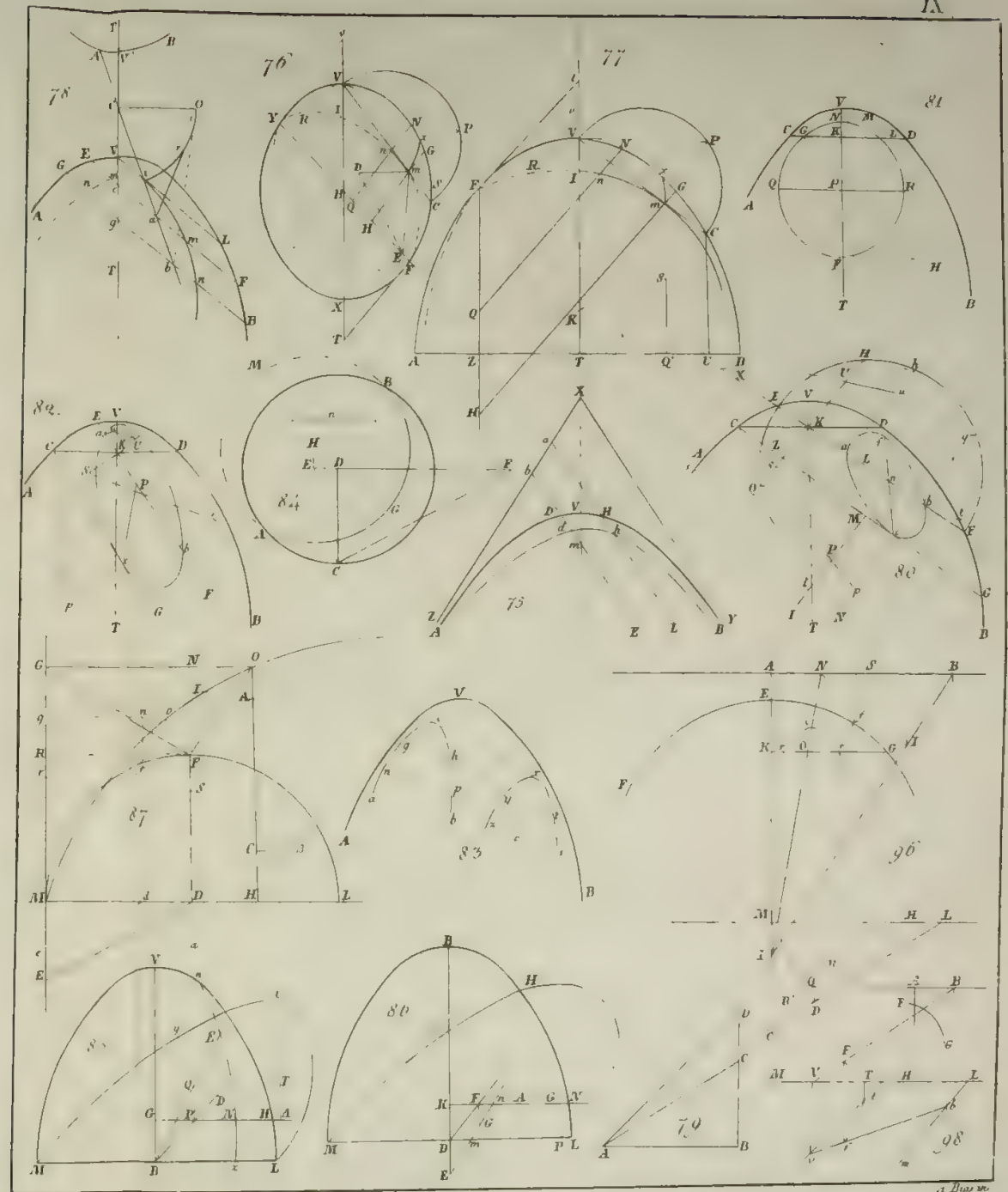


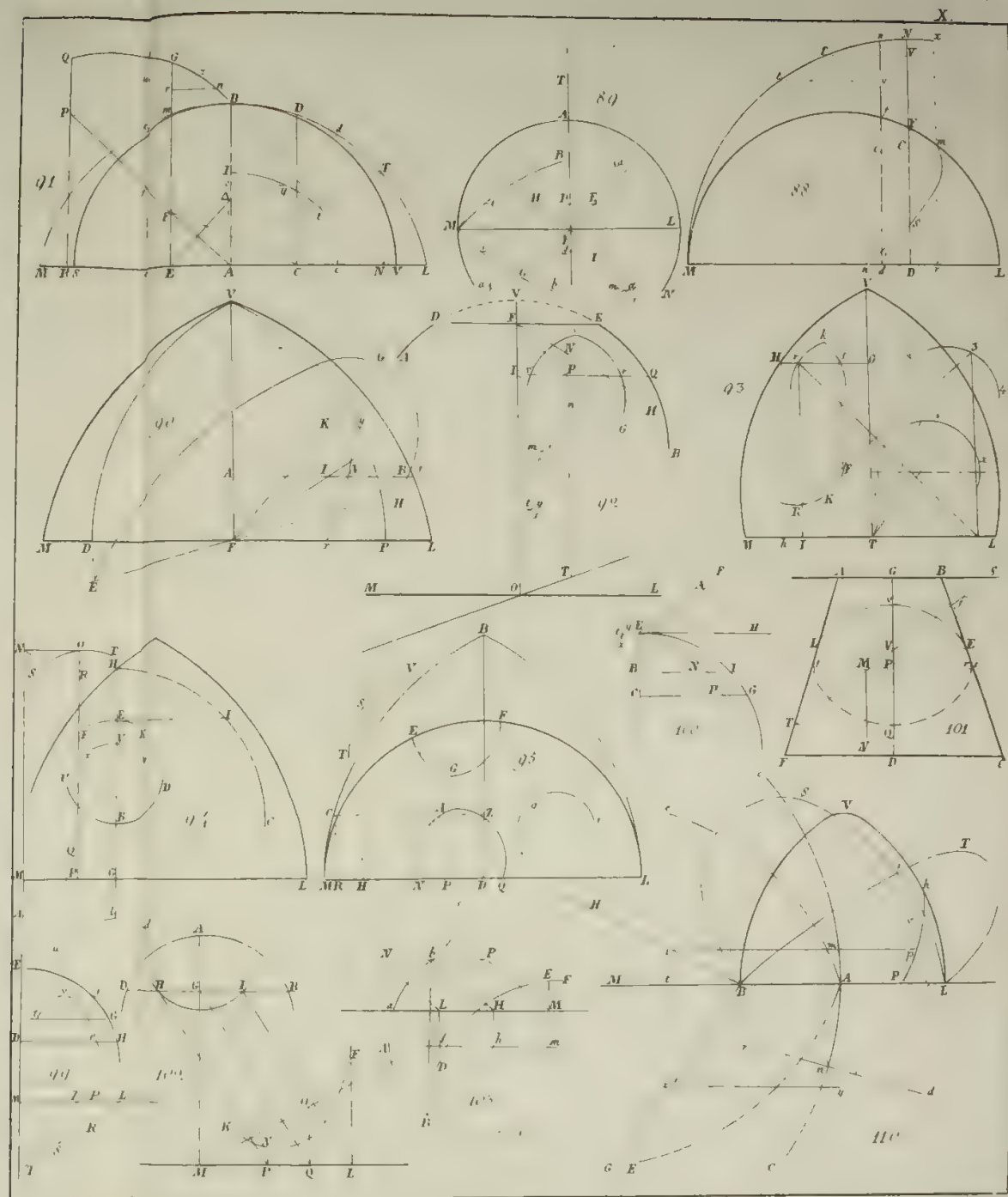


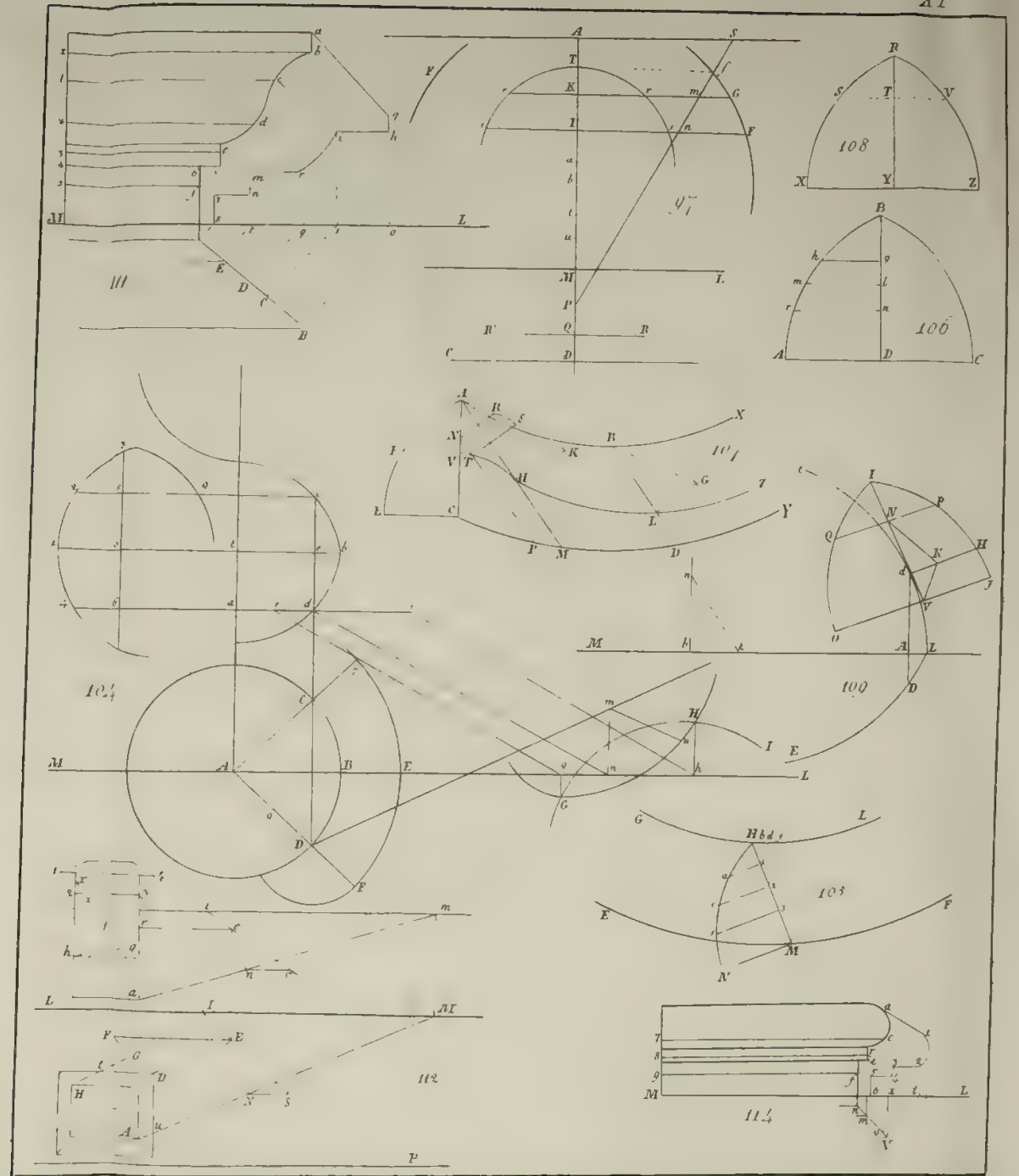


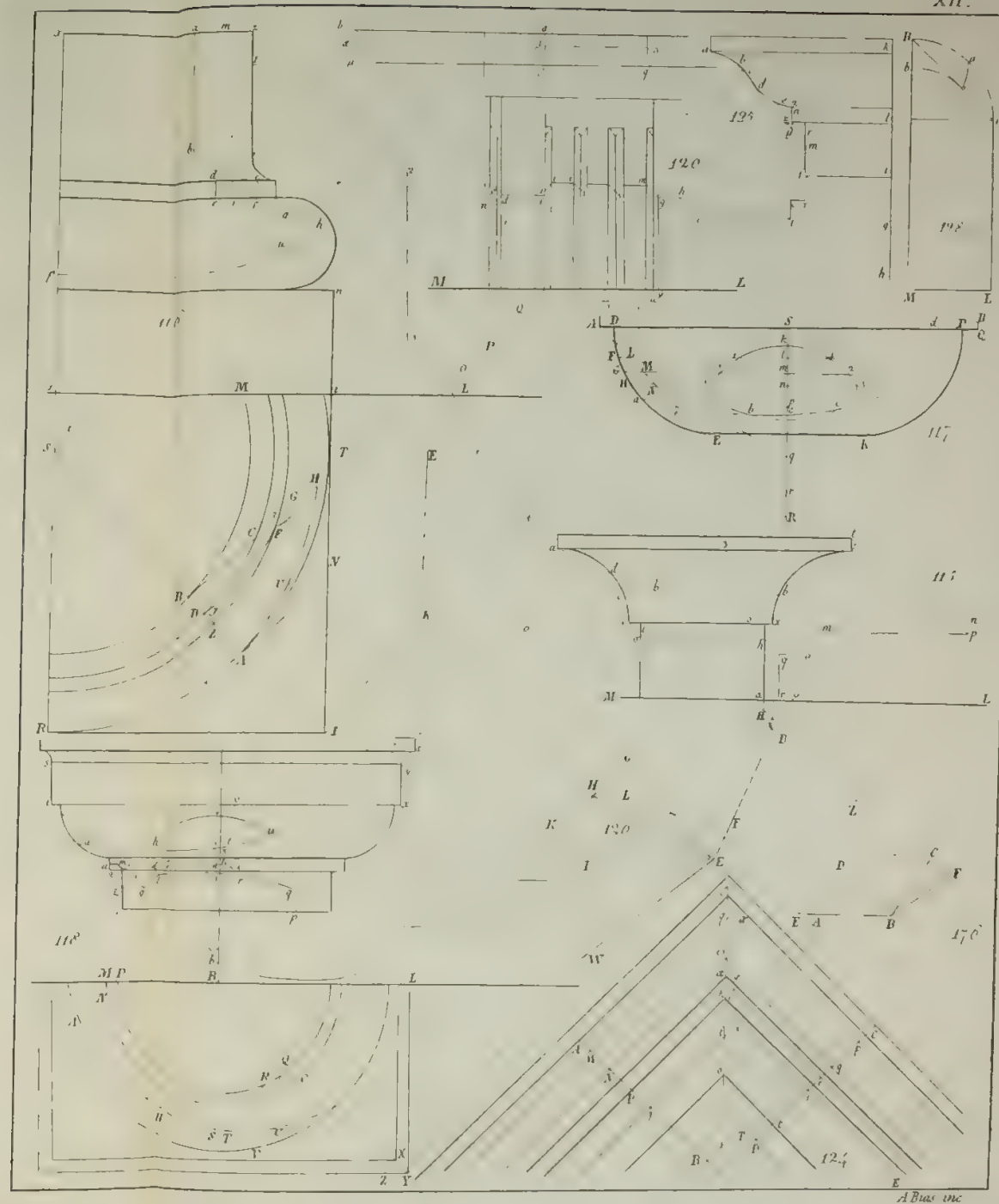


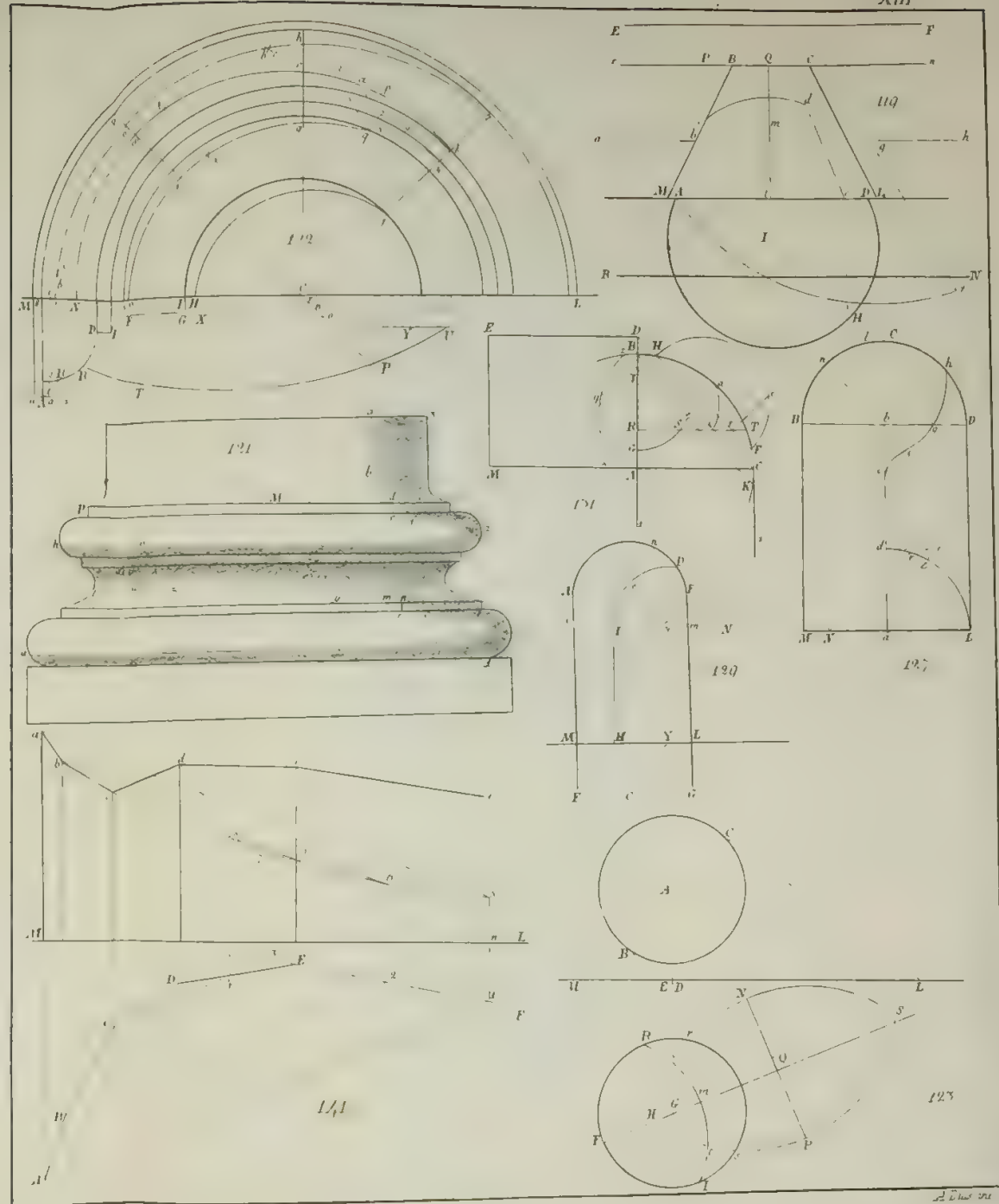


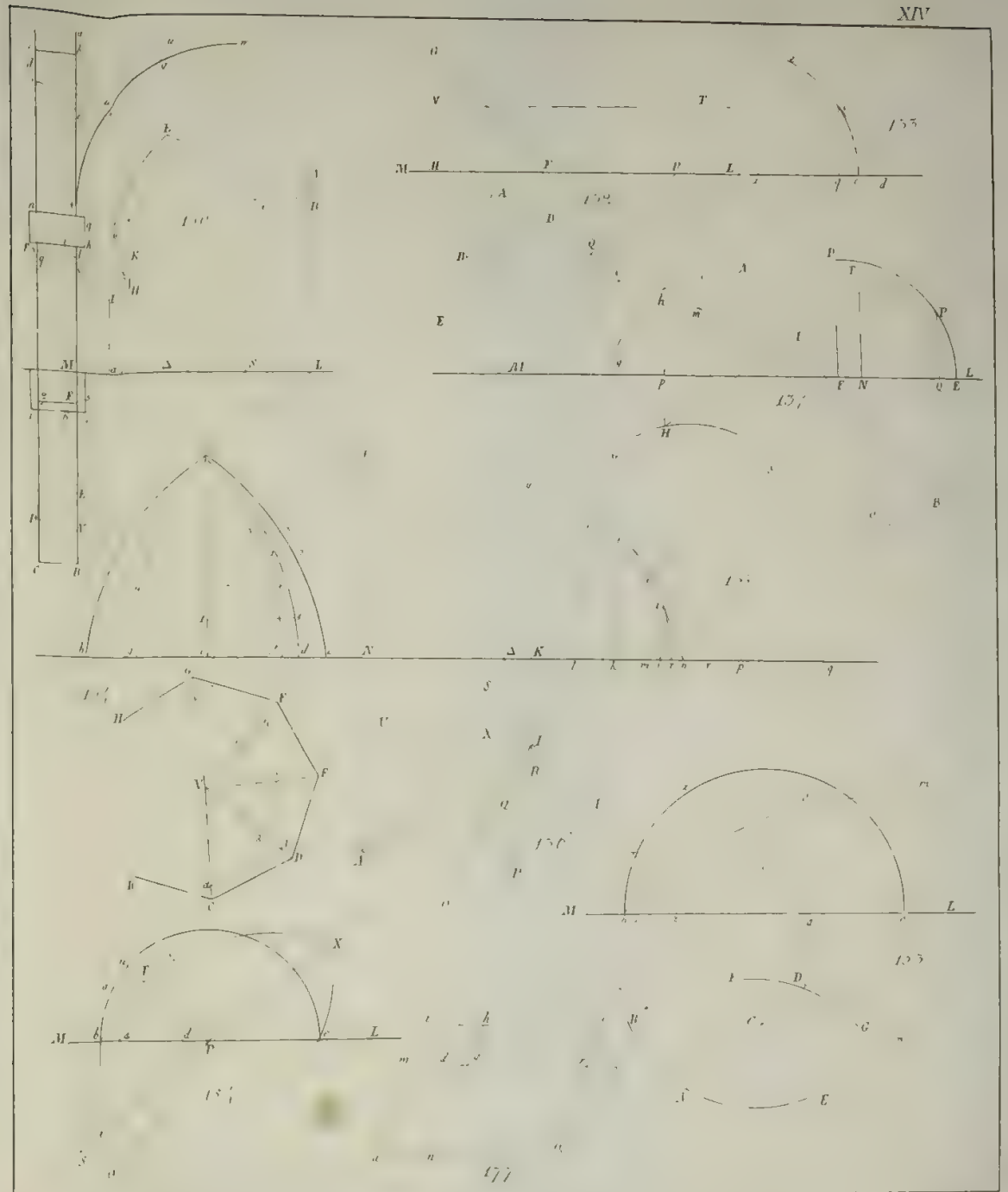


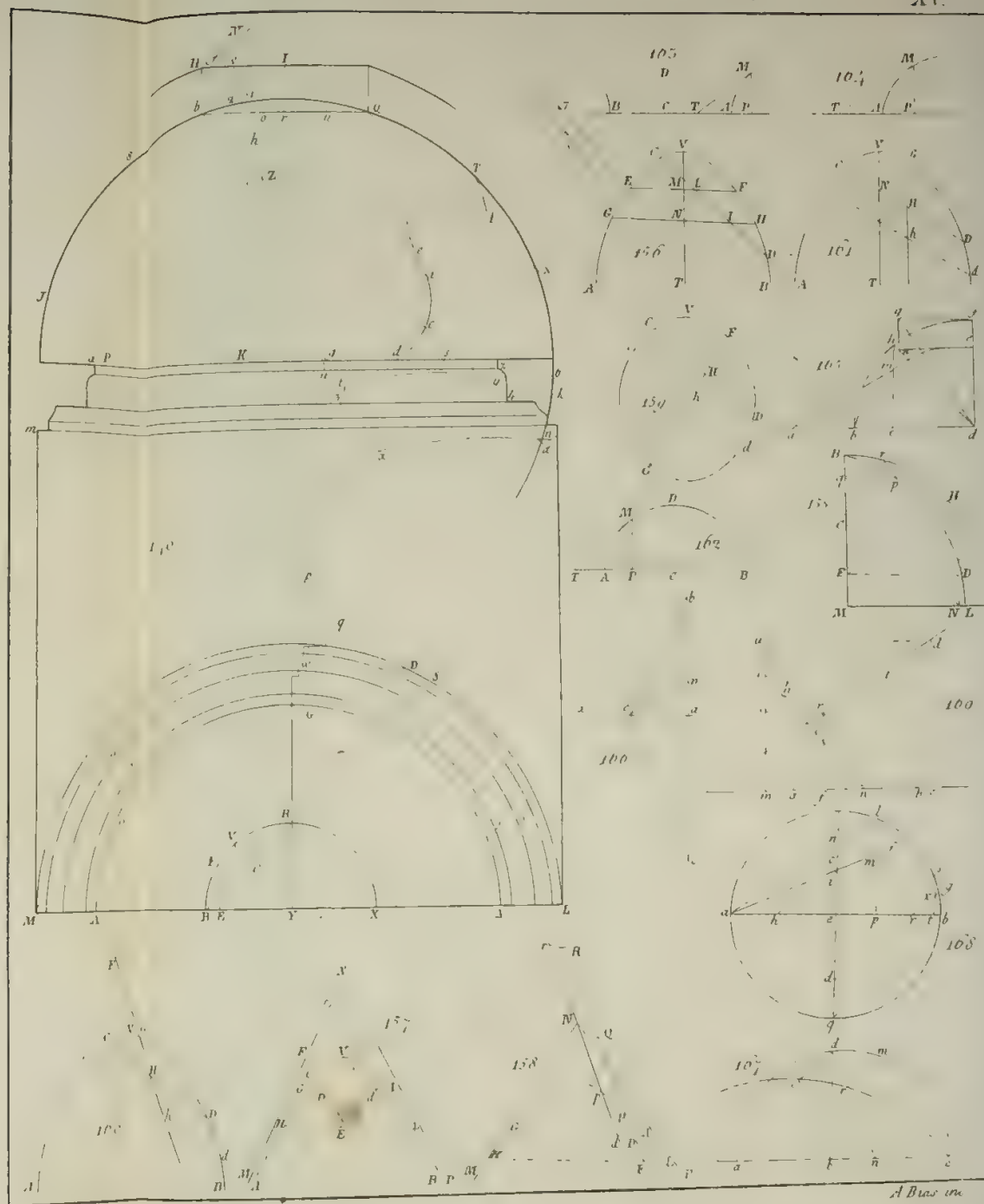




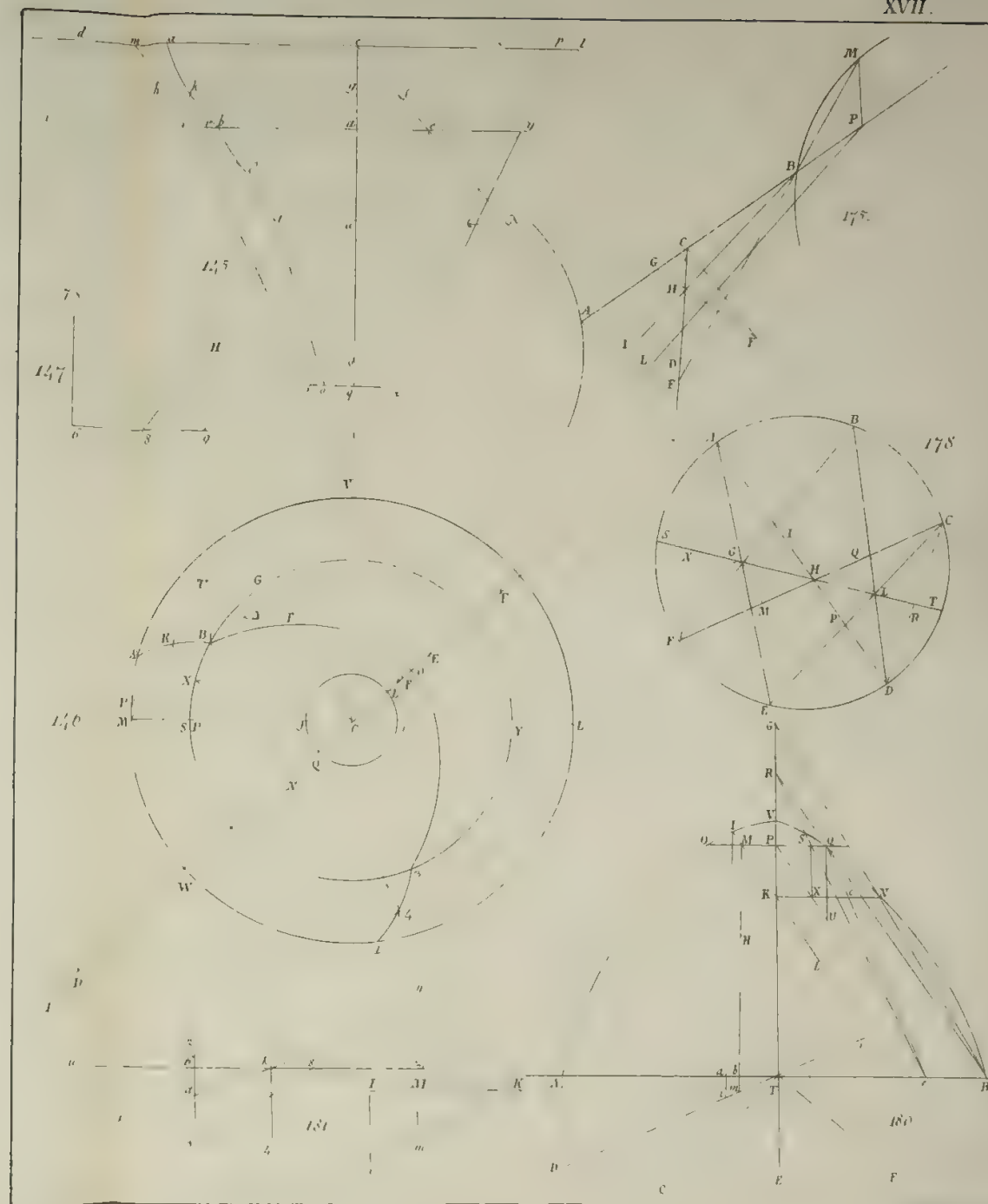


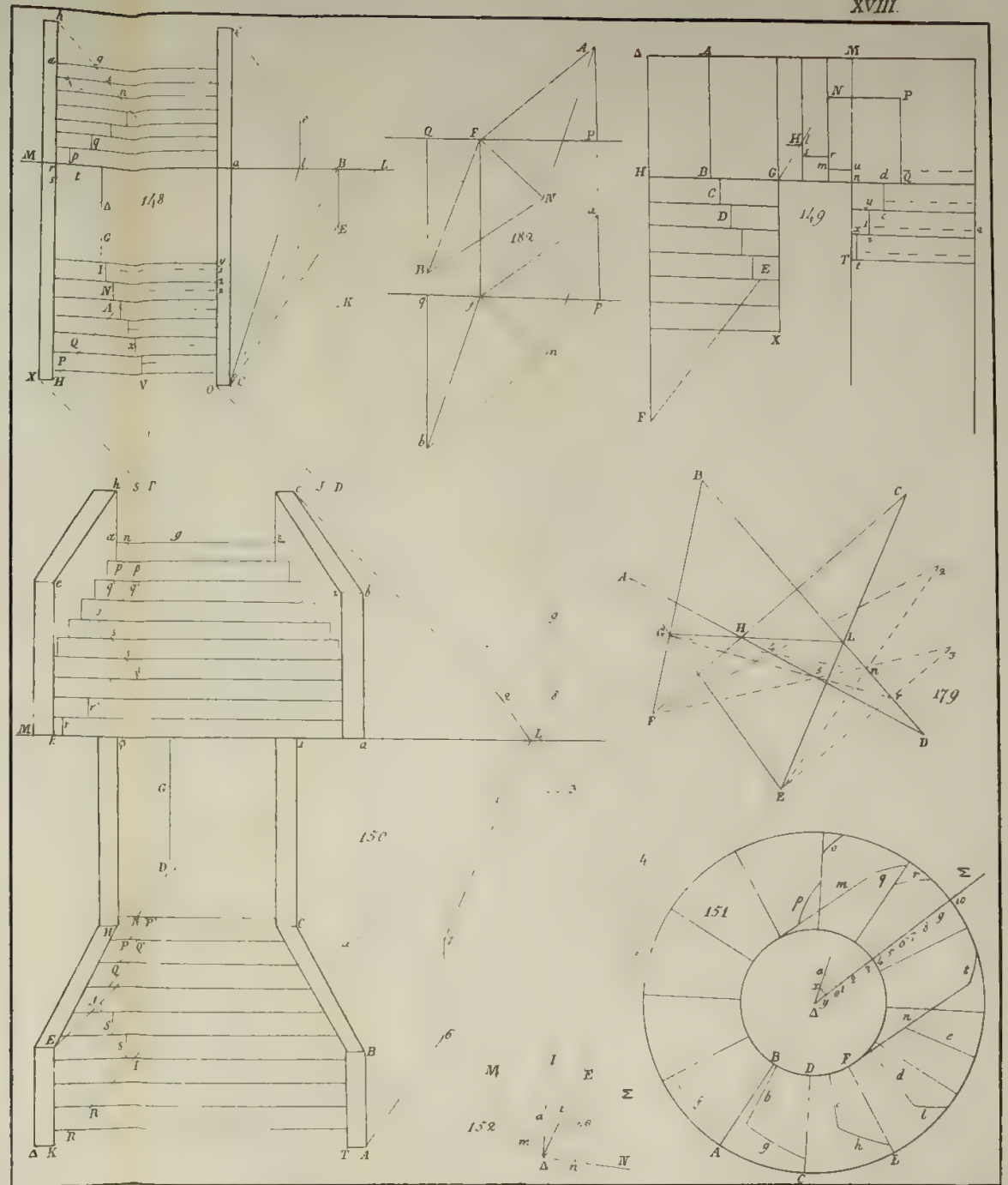












RED-
10/42 Menah

DDN. Z

7/LN

22

18 Gavole e/p B

18753

